

Notiuni de electrotehnică si de matematică

În acest articol sunt tratate o parte din fenomenele si parametrii care prezintă un grad de dificultate mai ridicat.

Deasemenea, **în acest articol s-au utilizat litere mici (de exemplu u, i) pentru notarea mărimilor care sunt variabile în timp, iar pentru mărimile care au valori constante în timp s-au utilizat litere mari (de exemplu U, I).**

1. Inductanta

Dacă un flux magnetic variabil în timp străbate planul spirelor unei bobine, atunci în bobină se induce o tensiune electromotoare (aceasta este una dintre formulările legii inducției electromagnetice a lui Faraday). Presupunând că cele două terminale (borne) ale bobinei sunt conectate împreună, adică bobina este în scurtcircuit, atunci sensul tensiunii induse în bobină este astfel încât curentul generat de tensiunea indusă să producă un câmp magnetic care să se opună variației câmpului magnetic care a generat-o. Dacă fluxul magnetic care străbate planul spirelor bobinei nu mai este variabil în timp, atunci în bobină încetează să se mai inducă o tensiune electromotoare (t.e.m.).

Inductanta este proprietatea unei bobine de a se opune oricărei creșteri sau descreșteri de curent sau de flux prin ea. Opoziția este realizată de tensiunea electromotoare (t.e.m.) indusă în bobină. Această proprietate este similară cu inerția corpurilor, care se opun prin masa lor la forțele care tind să le accelereze.

Inductanta se notează cu litera L, iar unitatea de măsură pentru inductanță în SI (Sistemul Internațional de unități de măsură) este henry, cu simbolul [H].

O bobină are inductanta de un henry, dacă în bobină se autoinduce o tensiune electromotoare medie de un volt, atunci când curentul care curge prin conductorul bobinei are o variație de un amper, într-un interval de timp de o secundă.

Valoarea tensiunii induse într-o bobină cu inductanta L este dată de relația:

$$e = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (1.1)$$

e = t.e.m. medie indusă în bobină, [V];

ΔI = variația curentului prin bobină în intervalul de timp Δt , [A];

Δt = intervalul de timp în care are loc variația curentului, [s]

Litera grecească Δ se folosește în locul literei d , care vine de la cuvântul "diferență". Ea este folosită în asociere cu orice mărime, cum ar fi viteză, timp, flux magnetic, etc. Dacă este vorba despre curent electric, asocierea de litere ΔI nu înseamnă că se face produsul lor. Această asociere este folosită ca să se arate ce variație a suferit curentul electric și înseamnă diferența dintre valoarea finală I_2 a curentului și valoarea inițială I_1 a curentului, adică $\Delta I = I_2 - I_1$.

Semnul minus din relația (1.1) arată că t.e.m. indusă se opune totdeauna cauzei care a creat-o. Mărimea tensiunii induse este cea din relația (1.1) fără să se țină seama de semnul minus.

Exemplu:

Un curent cu intensitatea de 10 A trece printr-o bobină. Începând cu un anumit moment acesta scade în interval de 2 secunde la 1 A. Inductanța bobinei este de 0.8 H. Să se afle tensiunea medie autoindusă în bobină.

$$e = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -0.8 \cdot \frac{1-10}{2} = (-0.8) \cdot (-5) = 4 \text{ V}$$

Semnul pozitiv al tensiunii obținute arată că tensiunea autoindusă are tendința să mențină curentul la valoarea inițială, adică tensiunea autoindusă se opune scăderii curentului de la 10 A la 1 A. După cum se va vedea în continuare, această oponentă încetează după un timp destul de scurt.

Din relația (1.1) se vede că dintre două bobine prin care circulă curenți variabili în timp, fenomenul de autoinducție va fi mai puternic la bobina cu inductanța mai mare.

Relația între unitățile de măsură ale ecuației (1.1) este:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ H} \cdot \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ s}} \quad (1.2)$$

Din relația (1.2) se poate deduce relația dimensională pentru un henry:

$$1 \text{ H} = \frac{1 \text{ V} \cdot \text{s}}{1 \text{ A}} \quad (1.3)$$

În funcție de parametrii bobinei, inductanța este dată de relația:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r AN^2}{l} \quad (1.4)$$

$\mu_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ [H/m], permeabilitatea magnetică a vidului;

μ_r = permeabilitatea relativă a miezului bobinei, fără dimensiuni;

A = aria spirei bobinei (**nu** aria secțiunii conductorului), [m²];

N = numărul de spire al bobinei;
 l = lungimea bobinei, [m];
 L = inductanța bobinei, [H]

2. Inductanța mutuală

Presupunem că două bobine A și B se află una în apropierea celeilalte, astfel încât dacă prin bobină A va curge un curent, liniile fluxului magnetic produs de bobina A să străbată total, sau parțial planul spirelor bobinei B. Dacă curentul din bobina A va suferi o variație ΔI în intervalul de timp Δt , atunci și fluxul magnetic produs de bobina A va suferi o variație în același interval de timp Δt . Variația fluxului bobinei A va induce în bobina B o tensiune electromotoare. Se spune că între cele două bobine există inductanța mutuală, care se notează cu M și este măsurată tot în henry, [H].

Inductanța mutuală dintre două bobine este de un henry dacă în una din bobine se induce o tensiune electromotoare medie de un volt, atunci când curentul care curge prin cealaltă bobină are o variație de un amper, într-un interval de timp de o secundă.

$$e_M = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad (2.1)$$

e_M = t.e.m. indusă în bobina B, [V];

M = inductanța mutuală dintre cele două bobine, [H];

ΔI_1 = variația curentului în bobina A, în intervalul de timp Δt , [A];

Δt = intervalul de timp în care are loc variația curentului în bobina A, [s].

Inductanța mutuală M dintre două bobine este cu atât mai mare cu cât cele două bobine sunt mai strâns cuplate.

3. Conectarea unui circuit R-L la o tensiune continuă

Se consideră circuitul din Fig. 3.1.

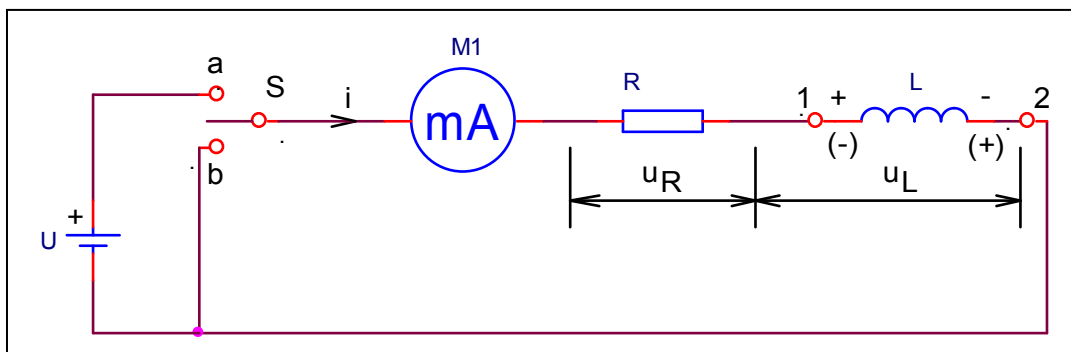


Fig. 3.1 Circuit cu rezistență și inductanță

În Fig.3.1 este prezentat un circuit serie format dintr-un rezistor cu rezistența R și o bobină cu inductanța L . Bobina se consideră fără rezistență; se consideră că rezistența ei este inclusă în rezistența R . În momentul în care comutatorul S se pune pe poziția a , combinația R - L este conectată brusc la tensiunea U a bateriei. Considerăm momentul punerii comutatorului pe poziția a ca fiind momentul zero ($t=0$). Cu ajutorul miliampermetrului $M1$ vom constata că curentul prin circuit nu atinge valoarea sa maximă instantaneu (adică la $t=0$), ci după un timp finit. Acest lucru se explică prin faptul că în momentul $t=0$, deși curentul prin circuit este zero ($i=0$), viteza de variație a curentului este diferită de zero,

$\frac{\Delta i}{\Delta t} \neq 0$ și astfel în bobină se va autoinduce o tensiune contraelectromotoare

$e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$, cu polaritatea $+$ la terminalul 1 al bobinei și cu $-$ (minus) la terminalul

2 al bobinei. Din Fig. 3.1 se vede că în orice moment tensiunea U a sursei este egală cu suma căderilor de tensiunilor de pe rezistența R și inductanța L , produse de curentul i din circuit, care are tendința să crească de la valoarea zero la valoarea sa maximă. Se poate scrie ecuația:

$$U = u_R + u_L = iR + L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Matematicienii au rezolvat această ecuație diferențială pentru curentul i și au obținut soluția dată de ecuația (3.2), reprezentată grafic în Fig. 3.2:

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = I_m (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.2)$$

unde:

$\frac{U}{R} = I_m$ este valoarea maximă a curentului care va fi atinsă în circuitul R - L , [A];

$e=2.7182818\dots$, este baza logaritmilor naturali (sau numărul lui Euler);

t = timpul scurs de la punerea comutatorului pe poziția a , [s];

$\tau = \frac{L}{R}$ = constanta de timp a circuitului; acest raport are dimensiune de timp și este măsurat în secunde [s], dacă L e măsurat în henry și R în ohm.

Exemplu: $L=50$ mH, $R=1$ k Ω , rezultă:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{1000 \Omega} = 5 \cdot 10^{-5} = 0.00005 \text{ [s]}$$

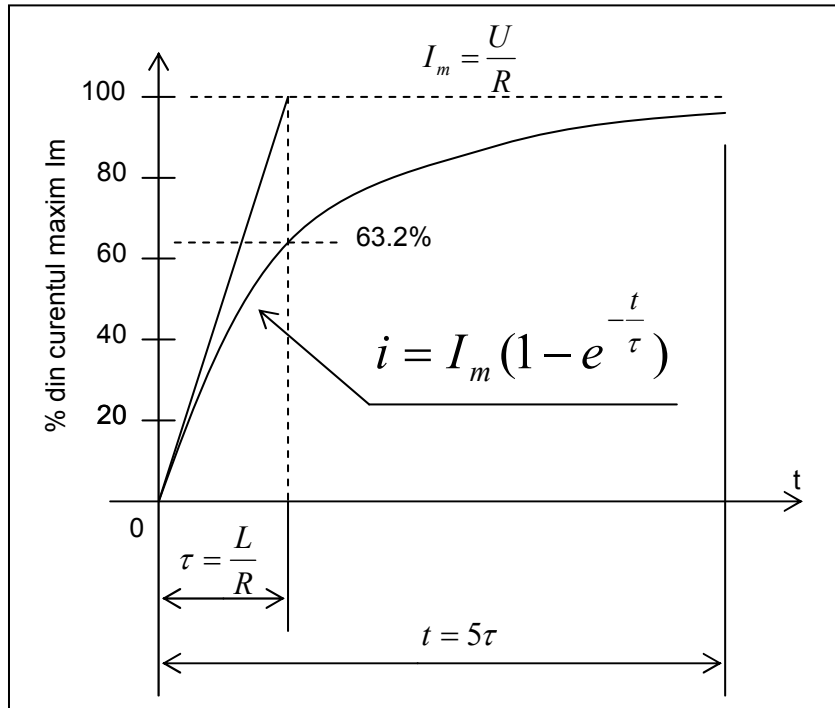


Fig. 3.2 Curba curentului într-un circuit R-L la conectarea la tensiune

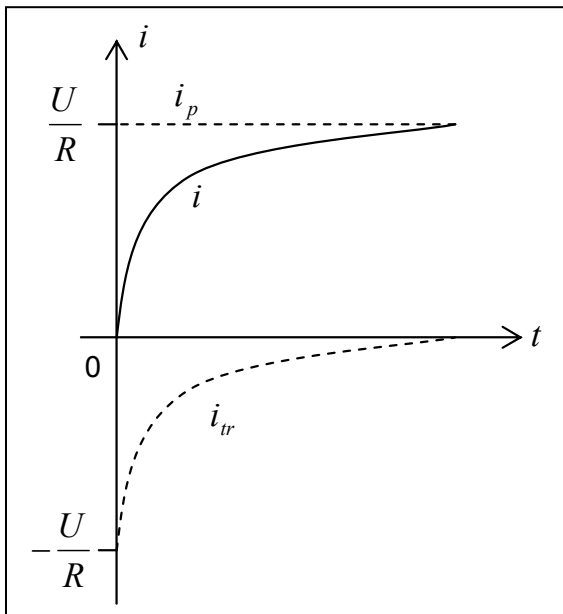


Fig. 3.3

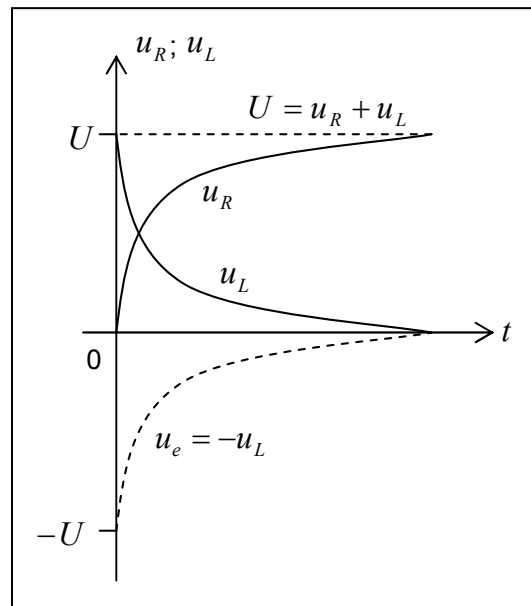


Fig. 3.4

Ecuatia (3.2) este o ecuatie exponentială, a cărei curbă este arătată în Fig. 3.2. Creșterea curentului este mai rapidă la început și apoi mai mică, astfel că la $t = \infty$ creșterea devine zero. Teoretic curentul atinge valoarea sa maximă I_m la

infinat. Practic, curentul atinge valoarea sa maximă după un timp foarte scurt, egal cu 5 constante de timp (5τ), pentru că $e^{-5} = 0.0067 \cong 0$.
Ecuatia (3.2) se poate scrie si astfel:

$$i = I_m - I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.3)$$

Acum se văd cele două componente ale curentului i , una permanentă de valoare constantă $i_p = I_m = \frac{U}{R}$ si alta variabilă în timp, tranzitorie, $i_{tr} = -I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$ care curge în sens invers componentei permanente, dar care descreste în timp, vezi figura 3.3.

Suma celor două componente i_p si i_{tr} dau valoarea curentului i care curge prin circuit. În Fig. 3.3 se vede că dacă se adună valorile din fiecare moment ale celor două curbe i_p si i_{tr} se obtine curba i . În Fig. 3.4 se vede că în momentul $t = 0$ tensiunea electromotoare autoindusă în bobină u_e este egală dar opusă cu tensiunea U a bateriei. Căderea de tensiune pe bobină este notată cu u_L .

4. Deconectarea unui circuit R-L de la o tensiune continuă

Ne referim din nou la circuitul din figura 3.1. După ce curentul în circuit s-a stabilit la valoarea maximă $I_m = \frac{U}{R}$, se comută brusc comutatorul S de pe pozitia **a** pe

pozitia **b**. Considerăm acest moment ca fiind momentul $t = 0$. Se va constata că desi bateria cu tensiunea U a fost deconectată din circuit, totusi în circuit continuă să curgă un curent, în acelasi sens, care la momentul $t = 0$ este chiar

$I_m = \frac{U}{R}$, dar care descreste în timp. Acest curent continuă să curgă în circuit prin

arcul electric care se formează între polii comutatorului S. Care este fenomenul care mentine curentul în circuit? Până la momentul $t = 0$ curentul fiind constant si

egal cu I_m , variatia lui in timp era zero, adică $\frac{\Delta I_m}{\Delta t} = 0$. La momentul $t = 0$

curentul are tendinta să scadă, deci $\frac{\Delta i}{\Delta t} \neq 0$. Ca urmare în bobină se va

autoinduce o tensiune electromotoare $e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$, cu polaritatea + la terminalul 2

al bobinei si - (minus) la terminalul 1 (polaritățile arătate pe fig. 3.1 în paranteze). Această tensiune autoindusă va încerca să mentină curentul în circuit, dar va descreste în timp. După un anumit timp, teoretic infinit, dar practic după $t = 5\tau$, curentul în circuit va scădea la zero.

Ecuatia curentului din circuit o vom deduce din ecuatia (3.1) în care se va pune conditia $U=0$. Rezultă:

$$0 = iR + L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (4.1)$$

Matematicienii au rezolvat această ecuație în raport cu i și au obținut soluția dată de ecuația (4.2), reprezentată grafic în Fig. 4.1:

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.2)$$

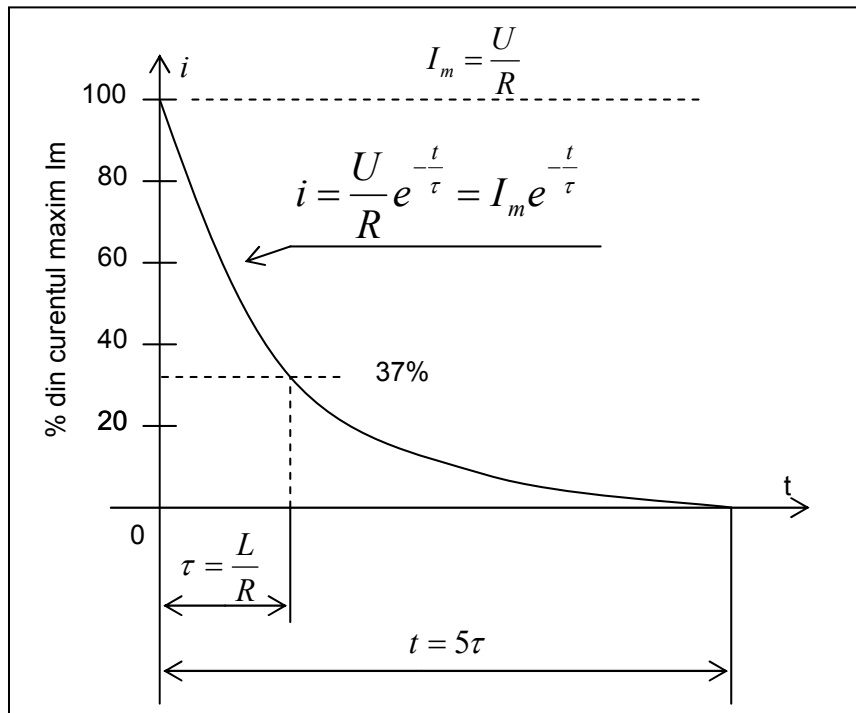


Fig. 4.1 Descreșterea curentului într-un circuit R-L, la deconectarea de la tensiune

Pentru $t = \tau = \frac{L}{R}$ din ecuația (4.2) se obține:

$$i = \frac{I_m}{e} = \frac{I_m}{2.71828} = 0.37I_m \quad (4.3)$$

Descreșterea curentului în circuitul din Fig. 3.1, descrisă de ecuația (4.2), este arătat în Fig. 4.1.

Din cele două cazuri prezentate în Fig. 3.1, cât și din curbele prezentate în figurile 3.2, 3.3, 3.4 și 4.1 se trage următoarea concluzie:

La momentul conectării la sursă a unui circuit care conține o bobină, $t = 0$, curentul prin circuit este zero, în timp ce tensiunea la bornele bobinei este

maximă. După un timp, teoretic infinit, dar practic după 5 constante de timp curentul atinge valoarea sa maximă, I_m , iar tensiunea autoindusă în bobină devine zero.

Aceasta este proprietatea fundamentală a bobinei. O bobină cu inductanța L se opune variației curentului care o străbate. Curentul dintr-un circuit care conține o bobină rămâne în urma tensiunii de la bornele bobinei.

5. Conectarea unui circuit R-C la o tensiune continuă; încărcarea condensatorului

Se consideră circuitul din Fig. 5.1:

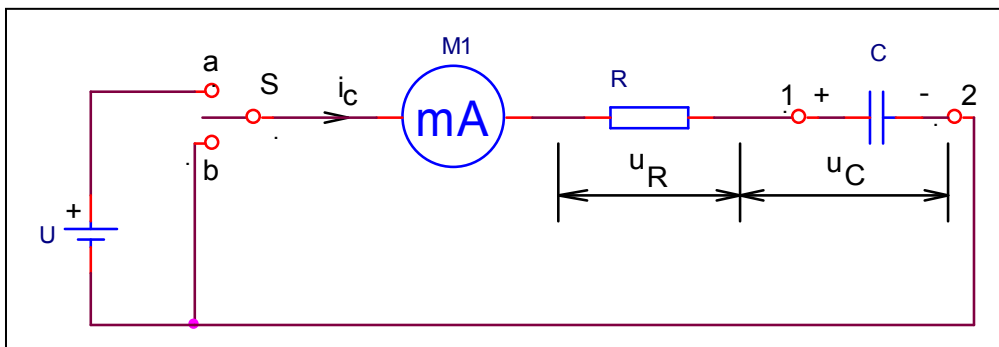


Fig. 5.1. Circuit R-C conectat la o tensiune continuă

Se presupune că inițial condensatorul este descărcat. La momentul $t = 0$ se pune comutatorul S pe poziția a . În acest fel circuitul R-C se conectează la bateria cu tensiunea U . Chiar în momentul $t = 0$ miliampermetrul $M1$ din circuit ne arată o valoare maximă a curentului prin circuit, care după un timp scade la zero. În timpul încărcării condensatorului (S pe poziția a), tensiunea U a bateriei este egală cu suma tensiunilor de pe rezistență și de pe condensator:

$$U = u_R + u_c = i_c R + u_c \quad (5.1)$$

Curentul de încărcare al condensatorului este dat de variația sarcinii Δq de pe armăturile condensatorului în unitatea de timp, adică:

$$i_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta(C \cdot u_c)}{\Delta t} = C \frac{\Delta u_c}{\Delta t} \quad (5.2)$$

Înlocuind expresia lui i_c din ecuația (5.2) în ecuația (5.1) se obține:

$$U = CR \frac{\Delta u_c}{\Delta t} + u_c \quad (5.3)$$

Solutia ecuatiei (5.3) în raport cu u_c este dată de ecuatiea (5.4) si reprezentată grafic în Fig. 5.2:

$$u_c = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5.4)$$

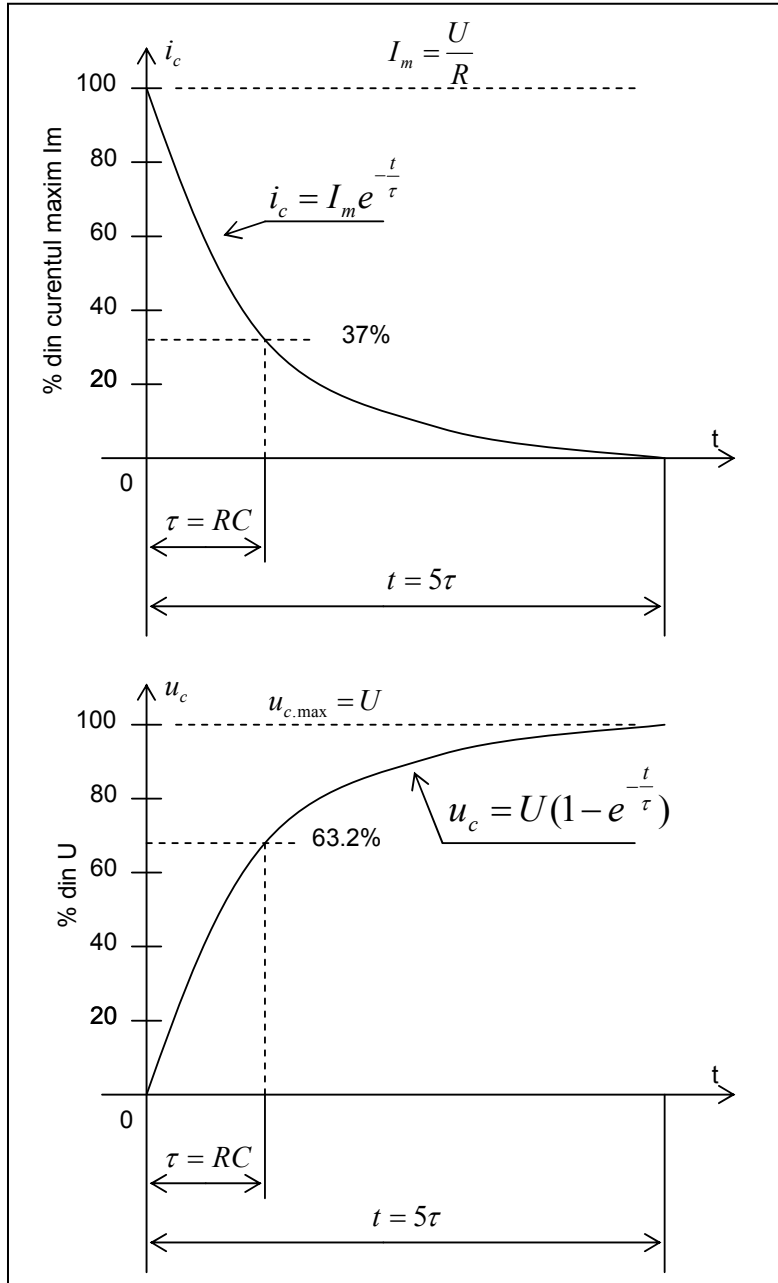


Fig. 5.2. Curbele curentului si tensiunii la încărcare a unui condensator

unde:

u_c = tensiunea la orice moment pe condensatorul C, [V];

U = tensiunea sursei care se va regăsi după un timp pe condensatorul C, [V]

t = timpul scurs de la momentul conectării circuitului la baterie, [s];
 $e=2.7182818\dots$, este baza logaritmilor naturali (sau numărul lui Euler);

$\tau = RC$ = constanta de timp a circuitului; produsul RC are dimensiune de timp și este măsurat în secunde [s], dacă R este măsurată în Ω și C în farad [F].
Exemplu: $R=1000 \text{ k}\Omega$, $C=50 \mu\text{F}$. $\tau = RC = 1000000\Omega \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 50 \text{ [s]}$.

Curentul de încărcare este dat de ecuația (5.5) și reprezentat în Fig. 5.2:

$$i_c = I_m e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.5)$$

Ecuațiile (5.4) și (5.5), care descriu curbele de încărcare ale condensatorului, sunt reprezentate grafic în Fig. 5.2.

Atât din curbele prezentate în Fig.5.2, cât și din ecuațiile (5.4) și (5.5) se vede că:

În momentul conectării unui circuit, care conține un condensator, la tensiunea U a sursei, $t = 0$, curentul prin circuit este maxim, I_m , și după un timp, teoretic infinit, dar practic după 5 constante de timp, scade la valoarea zero. Valoarea maximă a curentului din circuit este $I_m = \frac{U}{R}$. În momentul conectării, $t = 0$, tensiunea de la bornele condensatorului este zero, iar după un timp, teoretic infinit, dar practic după 5 constante de timp, crește la valoarea maximă, $u_{c.\max} = U$. După ce condensatorul s-a încărcat, curentul prin circuit încetează să mai curgă, scade la zero.

Aceasta este proprietatea fundamentală a condensatorului electric. Un condensator electric se opune variației tensiunii la bornele sale prin curentul pe care îl absoarbe de la sursă. Curentul într-un circuit cu un condensator atinge valoarea maximă “înaintea” tensiunii de la bornele condensatorului, sau altfel spus, tensiunea de la bornele condensatorului rămâne în urma curentului din circuitul în care este conectat.

6. Deconectarea unui circuit R-C de la o tensiune continuă; descărcarea condensatorului

După un timp în care condensatorul din Fig. 5.1 se consideră încărcat, se comută brusc comutatorul S de pe poziția **a** pe poziția **b**. Se vede că singura sursă din circuit este chiar condensatorul C, care în momentul $t = 0$ (comutarea de pe poziția **a** pe poziția **b**) are chiar valoarea U a sursei. Anterior momentului $t = 0$, curentul prin circuit era zero, condensatorul era încărcat. La momentul $t = 0$ condensatorul va începe să se descarce, adică prin circuit va începe să curgă un curent i_c , dar sensul acestui curent este invers ca la încărcare, de

aceea în Fig. 6.1 curentul a fost reprezentat sub axa Ot . La momentul $t = 0$ tensiunea pe condensator u_c este maximă, egală cu tensiunea U a bateriei, dar pe măsură ce condensatorul se descarcă această tensiune va scădea până la zero. Ecuațiile (6.1) și (6.2), de descărcare ale condensatorului sunt reprezentate în Fig. 6.1.

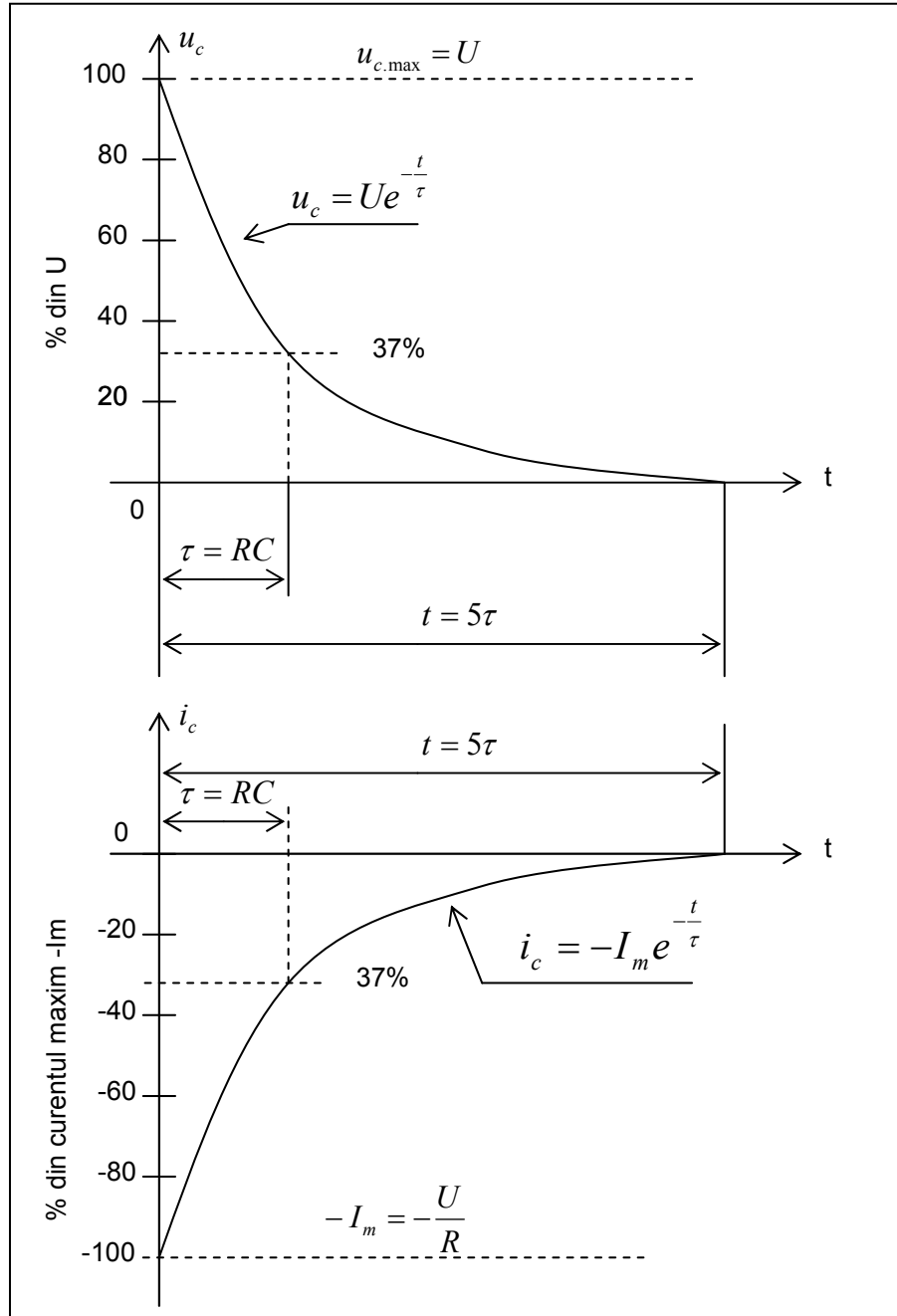


Fig. 6.1 Curbele tensiunii și curentului la descărcarea unui condensator

$$u_c = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.1)$$

$$i_c = -I_m e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.2)$$

7. Definitia radianului, viteza unghiulară

Se consideră un cerc de rază r . Se aleg două puncte A și B astfel încât lungimea arcului de cerc AB (arcul mic) să fie egală cu raza cercului r . În această situație mărimea unghiului la centru AOB, notat cu α , se spune că este de un radian, care se prescurtează rad, vezi Fig. 7.1

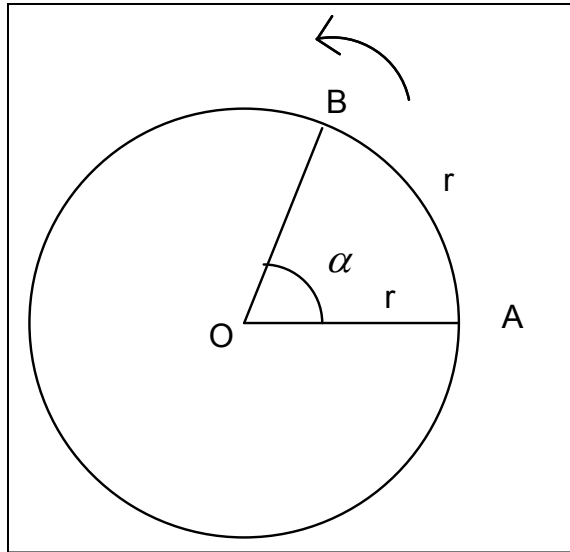


Fig. 7.1 Definitia radianului

Câți radiani are tot unghiul de 360° din jurul punctului O? Se știe că lungimea cercului este $2\pi r$ (unde $\pi = 3.1415\dots$). Pentru aflarea răspunsului se va împărți lungimea cercului la raza r și se obține:

$$\text{Un unghi de } 360^\circ = (2\pi r/r) = 2\pi \text{ rad.}$$

Viteza liniară medie se definește ca spațiul parcurs în unitatea de timp, deci formula vitezei medii este:

$$s = vt \quad (7.1)$$

unde:

v = viteza medie, [m/s];

s = spațiul parcurs în intervalul de timp t , [m];

t = intervalul de timp în care s-a parcurs spațiul s , [s]

În același mod se definește și viteza unghiulară medie. Se consideră că în Fig. 7.1 raza \overline{OB} a fost inițial peste raza \overline{OA} , și de la un moment, notat cu $t = 0$,

această rază începe să se miste în sens invers acelor de ceasornic, sau sens trigonometric, (sensul arătat de săgeată) cu o anumită viteză unghiulară ω , descriind unghiul la centru AOB notat cu α . Similar cu relația (7.1) rezultă că unghiul la centru α descris (parcurs) de raza rotitoare \overline{OB} în unitatea de timp este:

$$\alpha = \omega t \quad (7.2)$$

unde:

ω = viteza unghiulară medie, [rad/s];

α = unghiul parcurs de raza rotitoare în intervalul de timp t , [rad], sau [grade]

t = intervalul de timp în care s-a parcurs unghiul α , [s].

Se notează cu T intervalul de timp în care raza rotitoare \overline{OB} a parcurs un unghi la centru de 360^0 sau de 2π radiani. Acest interval de timp se numește **periodă**.

În momentul în care timpul t din relația (7.2) devine egal cu T , adică cu perioada, atunci și unghiul α devine egal cu 2π radiani. Se poate scrie:

$$2\pi = \omega T \quad \text{sau} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{T} 2\pi \quad (7.3)$$

Se notează:

$$f = \frac{1}{T} \quad (7.4)$$

unde:

f = frecvența, [1/s];

T = durata unei perioade în care se face o rotație completă, [s]

Deci frecvența are dimensiunea 1/s, care se mai numește hertz [Hz]. Se poate scrie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{T} 2\pi = 2\pi f \quad (22)$$

În cazul figurii 7.1, frecvența este de fapt numărul de rotații complete pe care le face raza \overline{OB} într-o secundă. Pentru o frecvență de 50 Hz înseamnă că raza rotitoare \overline{OB} face 50 rotații într-o secundă, sau 3000 rotații într-un minut.

8. Functiile sinus si cosinus

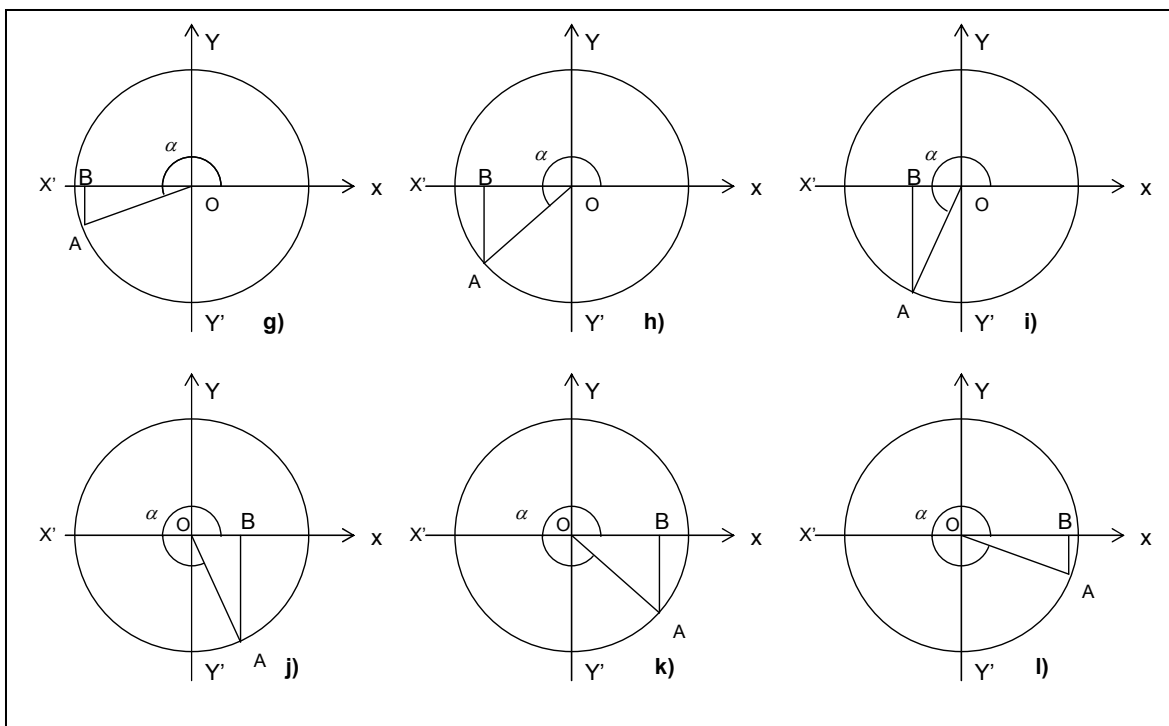
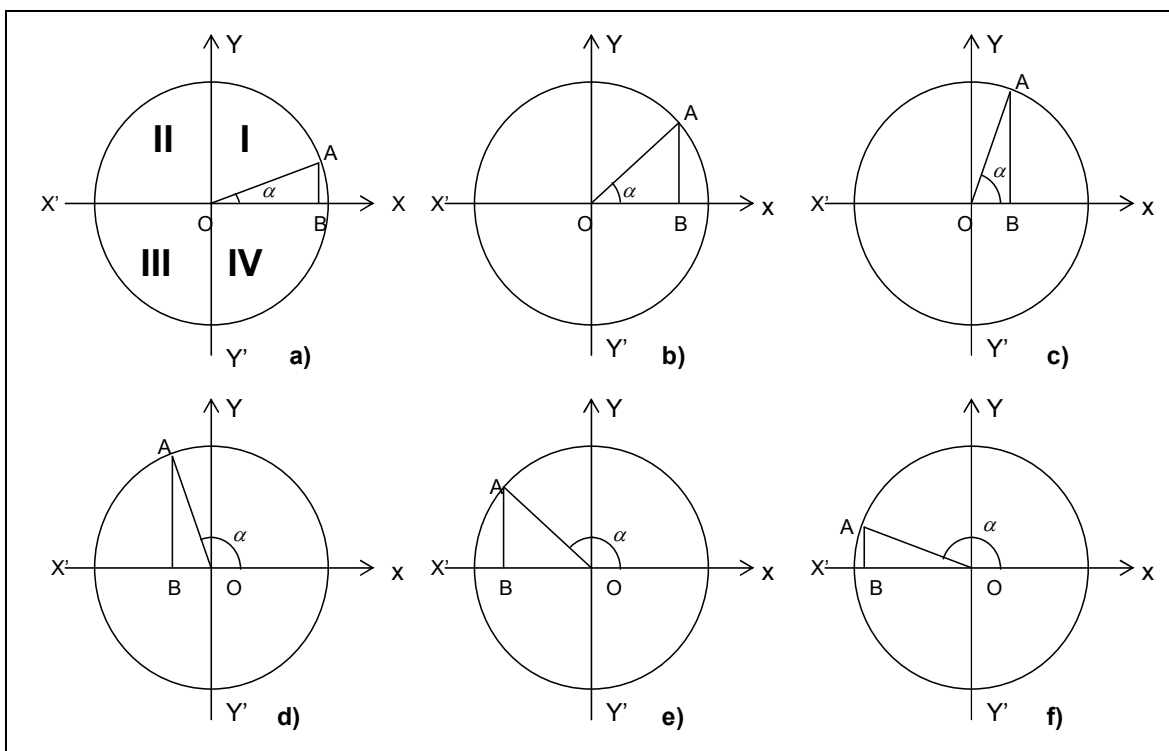


Fig. 8.1 Linii sinusului si cosinusului

În Fig. 8.1 sunt reprezentate două axe de coordonate $X'-O-X$ și $Y'-O-Y$, perpendiculare una pe cealaltă și care se intersectează în O . Din Fig. 8.1a se vede că aceste axe împart planul în patru cadrane, notate cu I, II, III și IV. Cu centrul în O s-a desenat un cerc cu raza \overline{OA} , care este egală cu unitatea, $\overline{OA} = 1$. Unghiul XOA s-a notat cu α . S-a mai construit un triunghi dreptunghic OAB . Se pune problema să se afle cât reprezintă cele două catete din ipotenuză, când unghiul α crește de la zero la 360° (sau de la zero la 2π radiani)? Pentru aceasta s-au introdus două noțiuni: $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$, care se citesc sin de α (sau sinus de α) și cos de α (sau cosinus de α).

În triunghiul AOB **$\sin \alpha$ este egal cu cateta opusă unghiului α supra (împărțită la) ipotenuză**. Cateta opusă unghiului α este \overline{AB} , iar ipotenuza este \overline{OA} , care este egală cu unitatea, $\overline{OA} = 1$. Conform definiției se poate scrie:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} \quad (8.1)$$

Segmentul \overline{AB} se mai numește și **linia sinusului**.

Să urmărim cum crește și cum scade linia sinusului (segmentul \overline{AB}), când unghiul α crește de la zero la 360° (sau de la zero la 2π radiani).

Se vede că atunci când $\alpha = 0$, segmentul $\overline{AB} = 0$. Deci $\sin 0 = \frac{0}{1} = 0$.

În Fig. 8.1a, b, c se vede cu ușurință că $\overline{AB} < \overline{OA} = 1$

În cazul în care unghiul α crește, segmentul \overline{AB} crește și pentru $\alpha = 90^\circ$ (sau $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad) segmentul \overline{AB} se suprapune peste semiaxa $O-Y$, devine egal cu segmentul \overline{OA} și se poate scrie:

$$\sin 90^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1, \text{ sau dacă unghiul } \alpha \text{ este măsurat în radiani, } \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1.$$

Dacă unghiul α crește în continuare de la 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad) până la 180° (π rad), cu toate că el rămâne în exteriorul triunghiului AOB , linia sinusului, care este tot segmentul \overline{AB} , va începe să scadă din nou, dar va rămâne deasupra axei $X' - O - X$, adică va rămâne pozitiv.

Când $\alpha = 180^\circ$ ($\alpha = \pi$ rad), segmentul \overline{AB} devine din nou zero și se poate scrie:

$$\sin 180^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{1} = 0, \text{ sau } \sin \pi = 0.$$

Dacă unghiul α continuă să crească, segmentul \overline{AB} va crește ca mărime, va fi mai mic ca 1, dar va fi negativ, pentru că va fi sub axa $X' - O - X$. Fig. 8.1g, h, i.

Când $\alpha = 270^\circ$ (sau $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ rad) segmentul \overline{AB} se suprapune peste semiaxa $O - Y'$, devine egal cu segmentul \overline{OA} , dar pentru că este negativ (adică sub axa $X' - O - X$) va avea valoarea -1 . Deci $\sin 270^\circ = \frac{-1}{1} = -1$ (sau $\sin \frac{3\pi}{4} = -1$).

Dacă unghiul α crește în continuare peste 270° , segmentul \overline{AB} va scădea în valoare absolută, adică va fi mai mic ca 1, dar va rămâne negativ (sub axa $X' - O - X$). Când $\alpha = 360^\circ$, ($\alpha = 2\pi$), segmentul \overline{AB} devine din nou egal cu zero și $\sin 360^\circ = \frac{0}{1} = 0$ (sau $\sin 2\pi = 0$).

Dacă s-ar face măsurători ale segmentului \overline{AB} pentru cât mai multe valori ale unghiului α , de la 0° la 360° (sau în radiani, de la 0 la 2π), iar lungimea cercului din Fig. 8.1 s-ar desfășura și s-ar așeza pe o dreaptă, se va obține un grafic ca cel din figura 8.2a, dacă α este măsurat în grade, sau Fig. 8.2b, dacă unghiul α este măsurat în radiani. Unind vârfurile acestor segmente se va obține curba funcției $\sin \alpha$, Fig. 8.2c, d.

Dacă unghiul α va deveni mai mare ca 360° (2π), valorile segmentului \overline{AB} , deci ale funcției $\sin \alpha$ se vor repeta.

Revenim la Fig.8.1a.

În triunghiul AOB **$\cos \alpha$ este egal cu cateta alăturată unghiului α supra (împărțită la) ipotenuză**. Cateta alăturată unghiului α este \overline{OB} , iar ipotenuza este \overline{OA} , care este egală cu unitatea, $\overline{OA} = 1$. Conform definiției se poate scrie:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB} \quad (8.2)$$

Segmentul \overline{OB} se mai numește și **linia cosinusului**.

Să urmărim cum crește și cum scade linia cosinusului (segmentul \overline{OB}), când unghiul α crește de la zero la 360° (sau de la zero la 2π radiani).

Se vede că atunci când $\alpha = 0$ segmentul $\overline{OB} = OA = 1$. Deci $\cos 0 = \frac{1}{1} = 1$.

Când unghiul α va crește de la 0 și se va apropia de 90° segmentul \overline{OB} va scădea de la valoarea sa maximă 1 și se va apropia de zero.

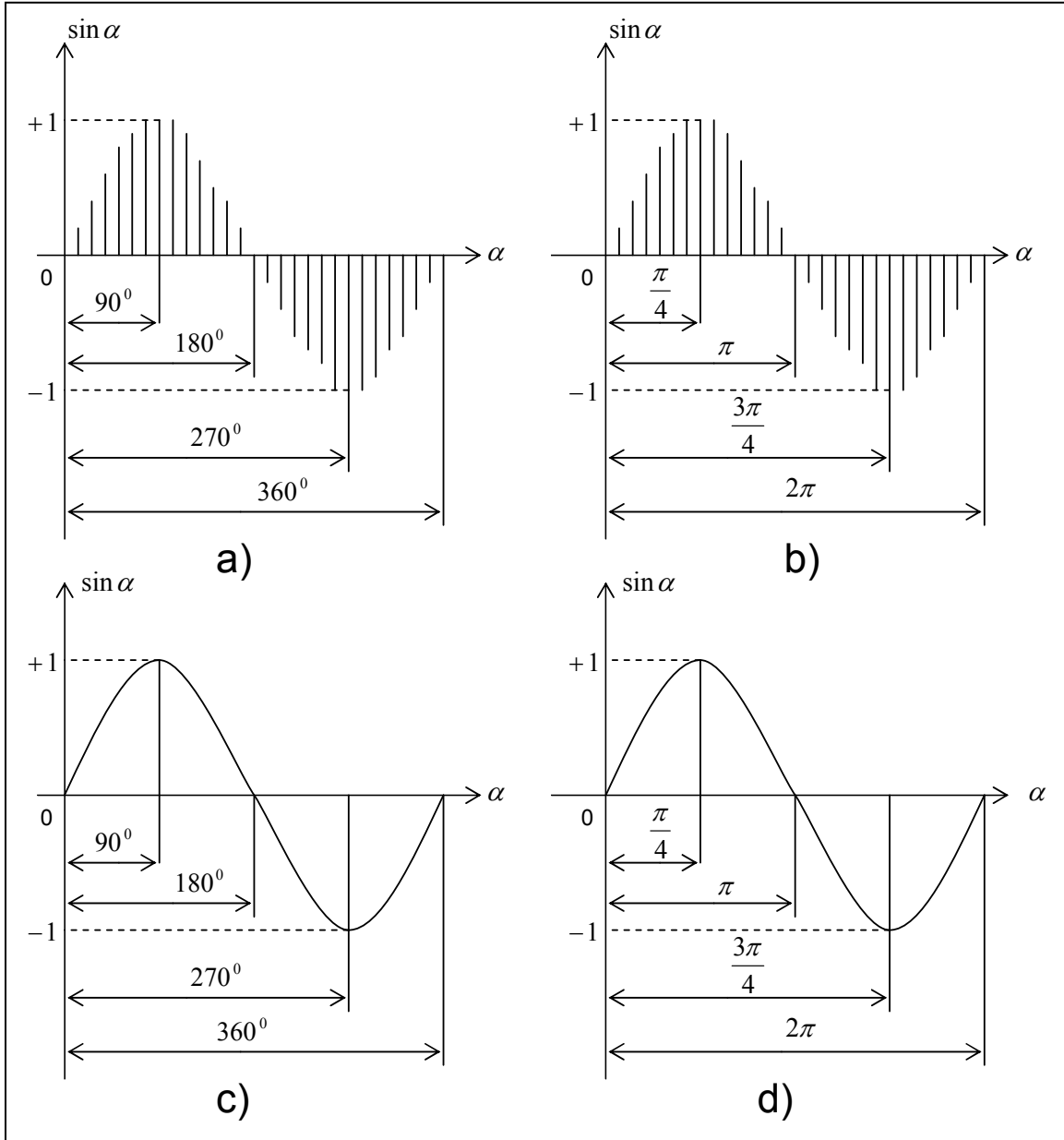


Fig. 8.2 Functia sinus ($\sin \alpha$)

Pentru $\alpha = 90^\circ$, rezultă $\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{1} = 0$.

Dacă unghiul α va crește peste 90° (cadranul II), segmentul \overline{OB} va crește din nou ca mărime, dar pentru că se va situa în stânga punctului O de pe axa $X'O-X$, se va considera negativ. Pentru $\alpha = 180^\circ$ ($\alpha = \pi$) se observă că din nou \overline{OB} devine egal cu unitatea, dar fiind amplasat la stânga punctului O de pe axa $X'O-X$, se consideră negativ. Deci pentru $\alpha = 180^\circ$ ($\alpha = \pi$) $\cos \alpha = \frac{-1}{1} = -1$.

Dacă unghiul α va crește de la 180° și se va apropia de 270° (cadrantul III), atunci segmentul \overline{OB} va scădea ca mărime (ca valoare absolută), dar va rămâne negativ. Pentru $\alpha = 270^\circ$ segmentul \overline{OB} devine zero. Deci $\cos 270^\circ = 0$. Dacă unghiul α va crește peste 270° (cadrantul IV) și se va apropia de 360° , segmentul \overline{OB} va deveni pozitiv (amplasat la dreapta punctului O pe axa X'-O-X), va crește din nou de la zero spre valoarea maximă 1, care are loc pentru $\alpha = 360^\circ$. Deci $\cos 360^\circ = \frac{1}{1} = 1$.

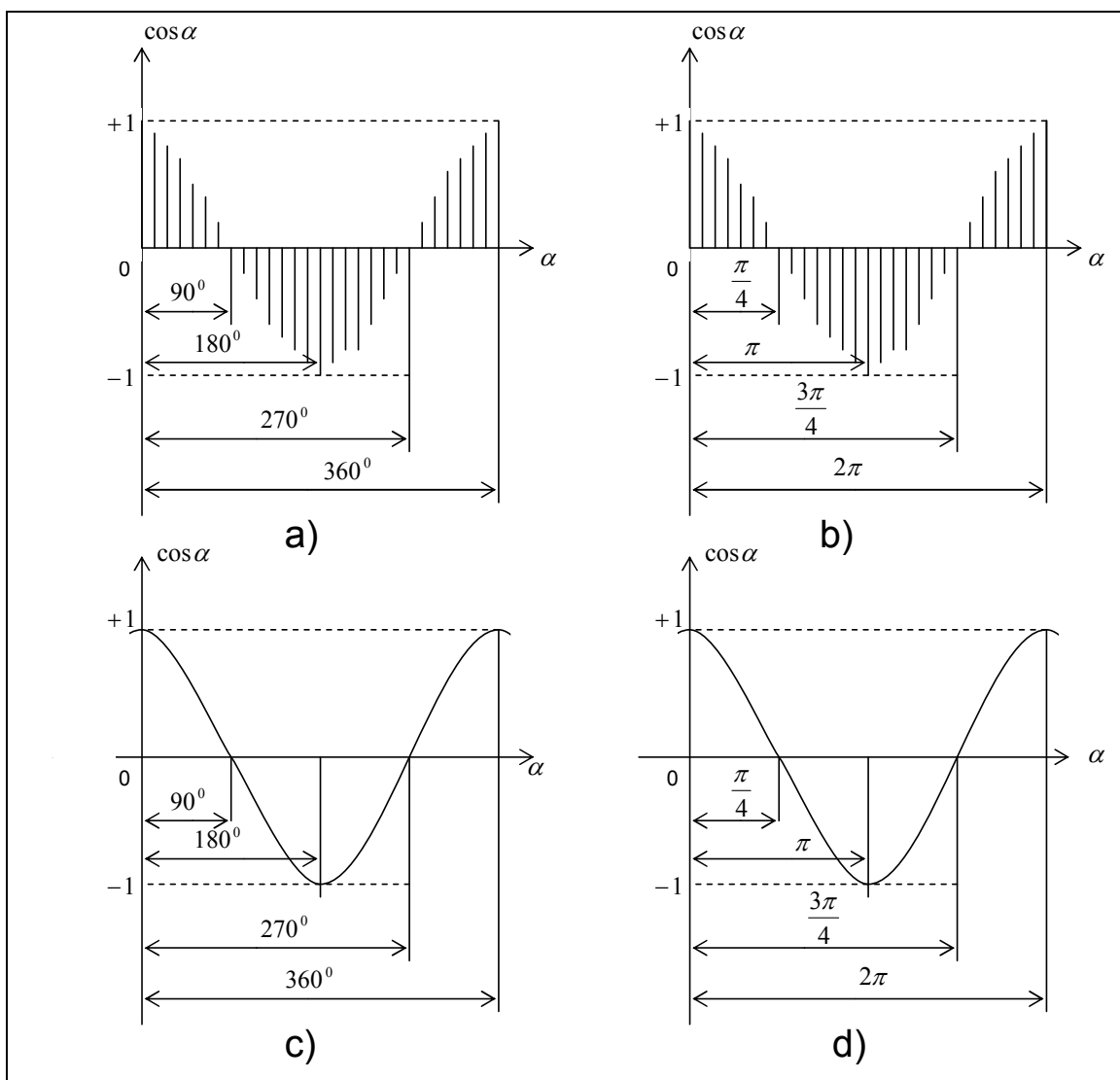


Fig. 8.3 Funcția cosinus ($\cos \alpha$)

Dacă s-ar face măsurători ale segmentului \overline{OB} pentru cât mai multe valori ale unghiului α , de la 0° la 360° (sau în radiani, de la 0 la 2π), iar lungimea cercului din Fig. 8.1 s-ar desfășura și s-ar așeza pe o dreaptă, se va obține un grafic ca cel din figura 8.3a, dacă α este măsurat în grade, sau Fig. 8.3b, dacă unghiul α

este măsurat în radiani. Unind vârfurile acestor segmente se va obține curba funcției $\cos \alpha$, Fig. 8.3c, d. Câteva valori ale funcțiilor sinus și cosinus sunt date în tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

	0° 0 rad	Cadran I	90° $\frac{\pi}{4}$	Cadran II	180° π	Cadran III	270° $\frac{3\pi}{4}$	Cadran IV	360° 2π
$\sin \alpha$	0	$\sin \alpha < 1$ $\sin \alpha > 0$	1	$\sin \alpha < 1$ $\sin \alpha > 0$	0	$\sin \alpha < 0$ $\sin \alpha > -1$	-1	$\sin \alpha < 0$ $\sin \alpha > -1$	0
$\cos \alpha$	1	$\cos \alpha < 1$ $\cos \alpha > 0$	0	$\cos \alpha < 0$ $\cos \alpha > -1$	-1	$\cos \alpha < 0$ $\cos \alpha > -1$	0	$\cos \alpha < 1$ $\cos \alpha > -1$	1

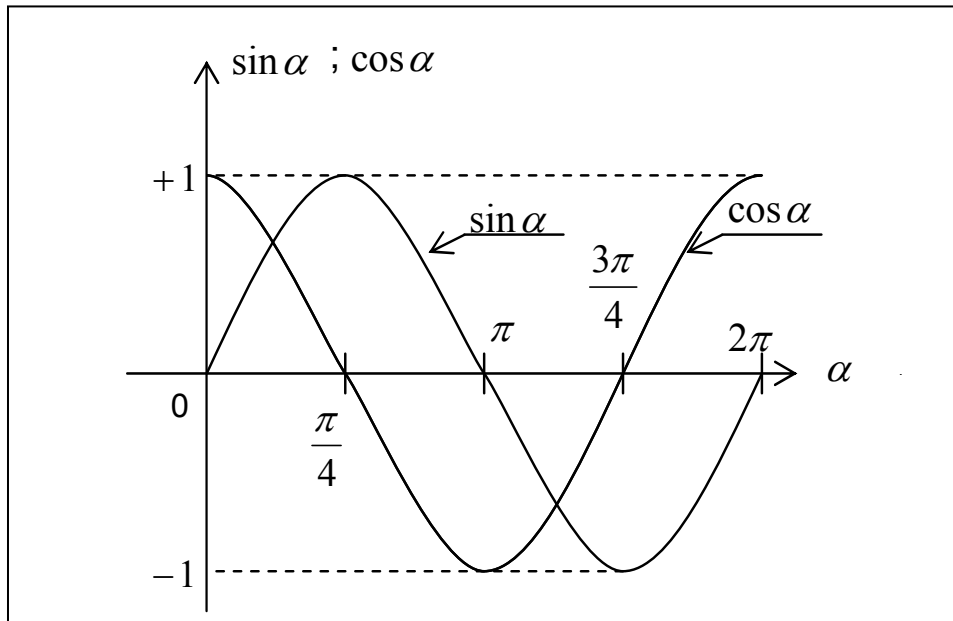


Fig.8.4 Curbele funcțiilor sinus și cosinus într-un singur grafic

Din Fig. 8.4 se vede că funcția $\cos \alpha$ este decalată cu $\frac{\pi}{4}$ "înainte" față de funcția $\sin \alpha$ și se poate scrie:

$$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{sau} \quad \cos \alpha = \sin(\alpha + 90^{\circ}) \quad (8.3)$$

Funcția $\cos \alpha$ este tot o funcție $\sin \alpha$, doar că este decalată înainte cu $\frac{\pi}{4}$ radiani, sau cu 90° înainte față de funcția $\sin \alpha$.

Cu studiul funcțiilor $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$, cât și a altor funcții se ocupă o secțiune a matematicii numită "TRIGONOMETRIE". De aceea, funcțiile $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ se numesc funcții trigonometrice. Mai sunt și alte funcții trigonometrice, dintre care se aminteste numai funcția tangentă de alfa:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (8.4)$$

În zilele noastre, orice calculator de buzunar mai "evoluat" ne poate calcula funcțiile trigonometrice $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, cât și alte funcții trigonometrice.

9. Forta magnetică exercitată asupra unei sarcini electrice în mișcare

Asupra particulelor materiale care posedă o sarcină electrică q și care se mișcă cu o viteză \vec{v} , perpendicular pe liniile de forță ale unui câmp magnetic, având densitatea de flux magnetic $\vec{B} = \mu \vec{H}$, acționează o forță magnetică \vec{F}_m care este perpendiculară atât pe viteza \vec{v} , cât și pe densitatea de flux magnetic \vec{B} , vezi Fig. 9.1.

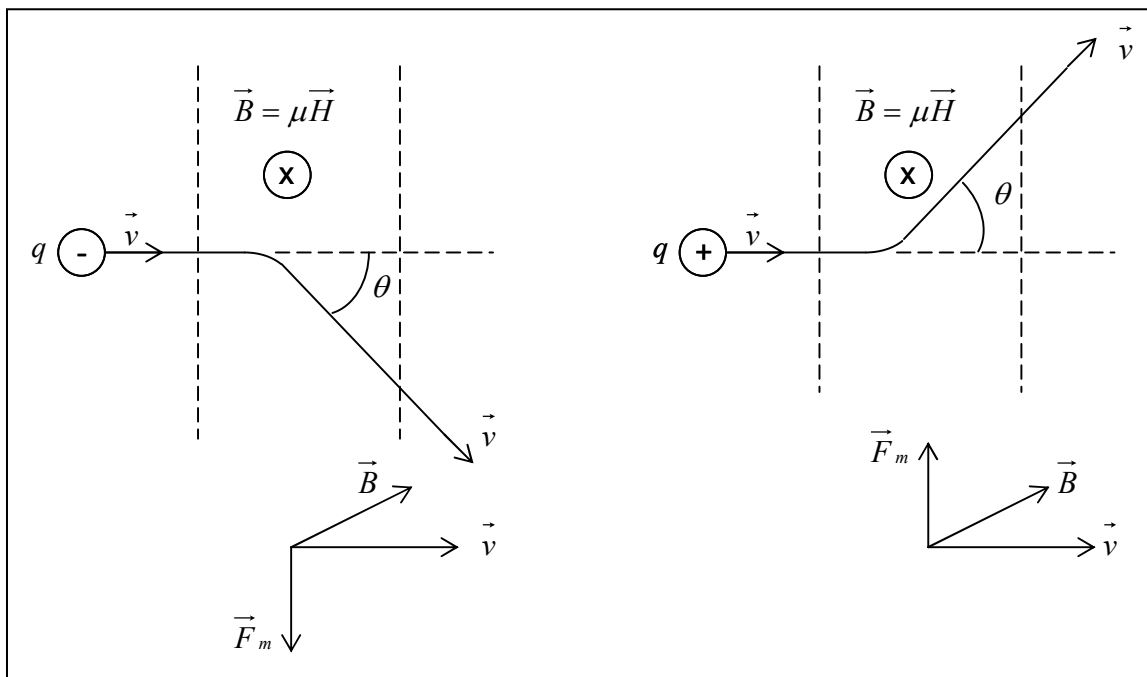


Fig. 9.1. Forta magnetică care acționează asupra particulelor materiale încărcate cu sarcină electrică, aflate în mișcare.

În Fig. 9.1 se presupune că sarcinile se mișcă orizontal într-un câmp magnetic, ale cărui linii de forță pornesc de la cel care privește figura și intră perpendicular în planul hârtiei (sau al ecranului calculatorului). Acest lucru este simbolizat de un cerculeț cu un semn "x" în interior, ca și cum ar fi "urma" unei săgeți eliberate dintr-un arc, dinspre cititor spre planul hârtiei (sau al ecranului calculatorului). Se

vede că dacă sarcina este pozitivă, sensul forței magnetice este orientată în sus, pe o direcție verticală, iar dacă sarcina este negativă, atunci forța magnetică este tot pe direcție verticală, dar orientată în jos. Sarcinile negative sau pozitive, după ce au fost deviate cu unghiul θ față de direcția inițială și au ieșit din câmpul magnetic, se vor mișca în continuare cu aceeași viteză \vec{v} , dar după traiectoria arătată în figura 9.1.

O metodă pentru determinarea orientării forței magnetice este arătată în Fig.9.2.



Fig.9.2. Metodă pentru determinarea direcției și sensului forței magnetice

Mai întâi se desenează vectorul viteză \vec{v} , așa cum este el orientat în spațiu. La vârful vectorului viteză \vec{v} se "plasează" vectorul densității de flux magnetic \vec{B} , orientat la 90° față de vectorul viteză, exact așa cum este el orientat în spațiu. După desenarea celor doi vectori, se începe o "excursie" în lungul lor, de la capătul de început al vectorului viteză \vec{v} și terminând cu capătul de sfârșit al vectorului densității de flux magnetic \vec{B} . În acest fel s-a stabilit un sens de parcurs, arătat de curbele cu săgeată din Fig.9.2. În cazul unei particule încărcate cu o sarcină electrică pozitivă, orientarea forței magnetice este dată de regula burghiului drept. Se rotește un burghiu cu "filet" dreapta în sensul arătat de curba cu săgeată la capăt. Direcția și sensul de deplasare al burghiului ne dă exact direcția și sensul forței magnetice. Pentru particule încărcate cu sarcină electrică negativă, direcția forței magnetice este aceeași ca în cazul unei sarcini pozitive, dar sensul forței magnetice este invers față de sensul de înaintare al burghiului cu "filet" dreapta. Această regulă, de stabilire a orientării forței magnetice, se numește "**regula burghiului drept**". Din Fig. 9.2, se vede că forța magnetică, în cele două cazuri, este perpendiculară atât pe vectorul viteză, cât și pe vectorul densității de flux magnetic.

În Fig. 9.1 este dată relația dintre densitatea de flux magnetic \vec{B} și intensitatea câmpului magnetic \vec{H} :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (9.1)$$

unde:

\vec{B} = densitatea de flux magnetic, weber pe metru pătrat, [Wb/m²];
 μ = permeabilitatea magnetică absolută a mediului în care se mișcă particula, henry pe metru, [H/m];
 \vec{H} = intensitatea câmpului magnetic, amperi pe metru, [A/m];

Mărimea forței magnetice este dată de relația (9.2):

$$F_m = qvB = qv(\mu H) = \mu qvH \quad (9.2)$$

unde:

F_m = mărimea (valoarea absolută) forței magnetice, newton, [N];
 q = sarcina electrică a particulei, pozitivă sau negativă, coulomb pe metru, [C/m];
 v = mărimea (valoarea absolută) vitezei particulei, [m/s];

10. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor care se mișcă perpendicular pe liniile de forță ale unui câmp magnetic

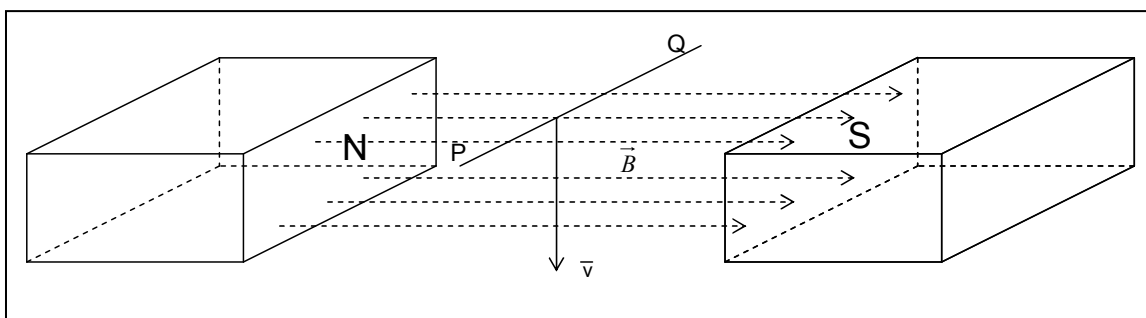


Fig. 10.1 Un conductor care se mișcă perpendicular pe liniile de forță magnetică

În Fig. 10.1 este reprezentat conductorul P-Q care se mișcă cu viteza \vec{v} perpendicular pe liniile fluxului magnetic cu densitatea \vec{B} . Electronii liberi din conductorul P-Q sunt uniform distribuiți pe toată lungimea conductorului. Asupra fiecărui electron liber va acționa o forță magnetică \vec{F}_m , a cărei orientare este dată de regula burghiului drept, descrisă la paragraful 9. Conform acestei reguli, orientarea forțelor magnetice este în lungul conductorului, de la P la Q. În acest fel, capătul P al conductorului va rămâne cu un deficit de electroni, în timp ce la capătul Q se vor acumula electroni, obținându-se astfel o diferență de potențial între capetele conductorului P-Q. **Ori de câte ori un conductor se mișcă într-un câmp magnetic, tăind perpendicular liniile de forță magnetică, în conductor se induce o tensiune electromotoare.** Aceasta este a doua formulare a **legii inducției electromagnetice**, descoperită de Faraday. Dacă

conductorul se mișcă paralel cu liniile de forță magnetice, atunci în conductor nu se induce nici-o tensiune. Dacă conductorul taie liniile magnetice după o direcție oblică față de liniile fluxului magnetic, tensiunea indusă va fi mai mică decât în cazul în care taie perpendicular liniile de flux magnetic.

11. Producerea tensiunii electrice alternative

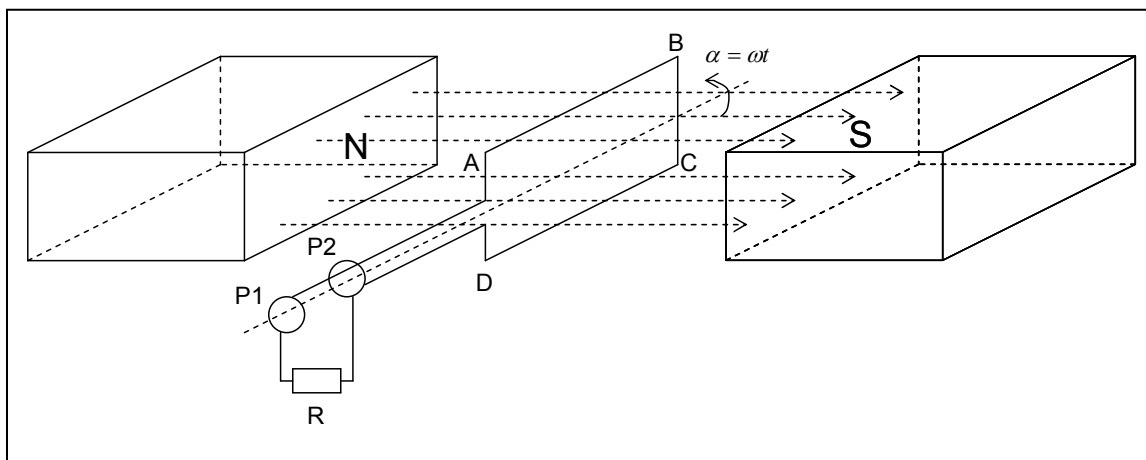


Fig. 11.1 Cel mai simplu generator de tensiune electrică alternativă

În Fig. 11.1 este reprezentat un cadru dreptunghiular confecționat dintr-un conductor metallic, care se rotește în jurul axei cu o viteză unghiulară medie ω . Extremitățile cadrului sunt conectate la două inele metalice care se rotesc simultan cu cadrul și care sunt în contact permanent cu periile colectoare P_1 și P_2 . Între periile colectoare este conectat un rezistor cu rezistența R . Poziția din figură este poziția de repaus, poziție din care începe să se învârtă cadrul în sensul arătat de săgeată. Chiar la începutul rotirii cadrului, cele două conductoare AB și CD , care compun cadrul, se mișcă aproape paralel cu liniile de forță magnetice, tensiunile induse în ele fiind mici, dar opuse ca polaritate. Pe măsură ce unghiul $\alpha = \omega t$ se apropie de 90° , tensiunile induse în cele două conductoare vor crește, atingând valoarea maximă când $\alpha = 90^\circ$, moment în care conductorul AB va fi exact în fața polului nord și conductorul CD în fața polului sud. Polaritățile diferite ale tensiunilor induse se datoresc faptului că vitezele liniare cu care se mișcă cele două conductoare AB și CD sunt egale ca mărime, dar sunt orientate în sensuri opuse, conductorul AB se mișcă în jos, iar conductorul CD se mișcă în sus. Dacă unghiul $\alpha = \omega t$ crește peste 90° , tensiunile induse în cele două conductoare vor începe să scadă, dar își vor menține polaritățile. Când $\alpha = 180^\circ$ tensiunea indusă în cele două conductoare va fi din nou zero. La $\alpha = 180^\circ$ poziția celor două conductoare va fi inversă celei arătate în Fig. 11.1, adică conductorul AB va fi jos și CD va fi sus. Dacă se continuă rotirea cadrului, adică unghiul $\alpha > 180^\circ$, conductorul CD va intra sub acțiunea polului nord, mișcându-se în jos, iar conductorul AB va intra sub acțiunea polului sud și se va mișca în sus. Tensiunile induse în cele două conductoare vor începe din nou să crească, dar vor avea polarități diferite ca în cazul în care unghiul α

fost cuprins între 0° și 180° . Când $\alpha = 270^{\circ}$ tensiunile induse în conductoare vor fi din nou maxime, polaritățile fiind inversate ca în cazul $\alpha = 90^{\circ}$. Continuând rotația, cadrul se va apropia de poziția inițială arătată în Fig. 11.1 și pentru $\alpha = 360^{\circ}$ tensiunile induse în cele două conductoare vor deveni din nou zero. Reprezentarea grafică a tensiunii dintre cele două perii colectoare în funcție de unghiul $\alpha = \omega t$ este arătată în Fig. 11.2. Unghiul $\alpha = \omega t$ se numește unghi de fază.

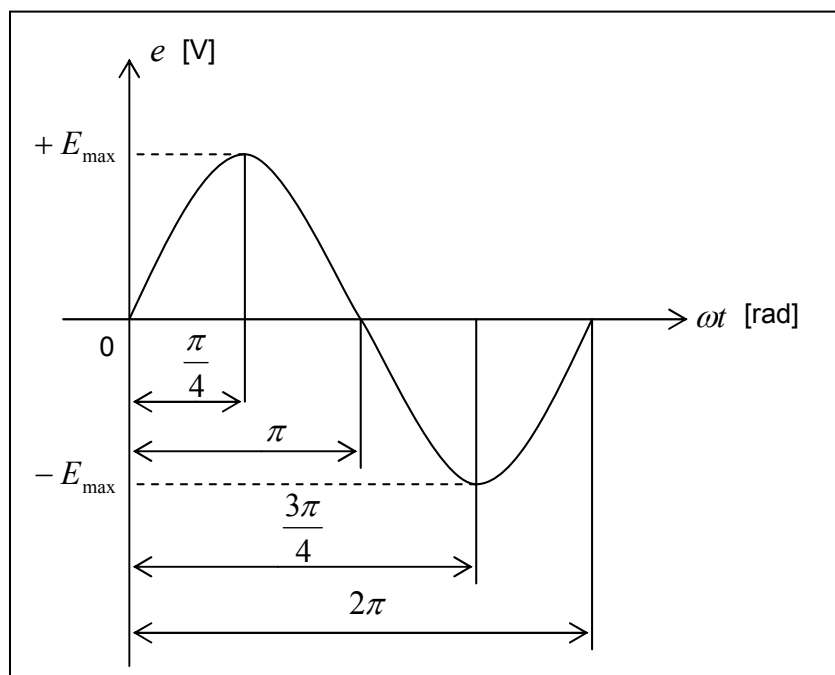


Fig. 11.2 Forma tensiunii electromotoare indusă în cadrul ABCD

Forma tensiunii induse în cadrul ABCD este arătată în Fig. 11.2. Aceasta este o formă sinusoidală. Tensiunile electromotoare se notează de obicei cu litera e și se scriu ca în ecuația (11.1):

$$e = E_{\max} \cdot \sin \omega t \quad (11.1)$$

unde:

e = valoarea momentană (instantanee) a tensiunii, [V];

E_{\max} = valoarea maximă a tensiunii, sau amplitudinea tensiunii, [V];

$\omega = 2\pi f$ = pulsția tensiunii, [rad/s];

f = frecvența tensiunii, [1/s] sau [Hz];

t = timpul scurs de la momentul în care se face studiul tensiunii, [s].

În cazul în care tensiunea alternativă este produsă ca în Fig. 11.1, ω este de fapt viteza unghiulară medie cu care se rotește cadrul ABCD. Radioamatorii

produc tensiuni alternative cu diverse oscilatoare. În această situație nu este nici-o piesă în mișcare și este mai nimerit ca ω să fie numită pulsația tensiunii, dar se măsoară tot în rad/s.

În ecuația (11.1) valoarea funcției $\sin \omega t$ este cuprinsă între -1 și +1, vezi paragraful 8. Rezultă că valorile tensiunii alternative vor fi cuprinse între $-E_{\max}$ și $+E_{\max}$, așa cum se vede în Fig.11.2.

În general, valoarea momentană tensiunii electromotoare a unui generator se notează cu litera e , care este de fapt tensiunea la bornele generatorului când generatorul este în gol, adică nu are nici-o sarcină legată la borne. Pentru menționarea tensiunii momentane de la bornele unui generator, în situația în care generatorul este în sarcină, se utilizează litera u .

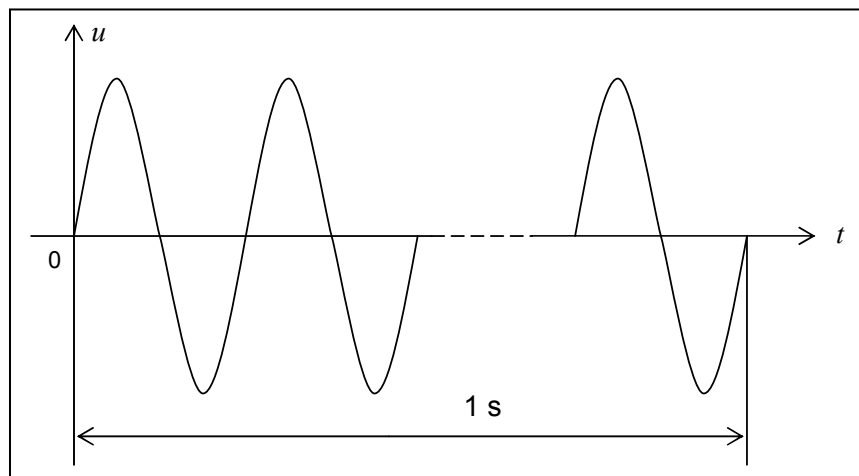


Fig. 11.3 Grafic pentru definiția frecvenței

Din Fig. 11.3 se poate vedea că **frecvența este numărul de cicluri (oscilații) complete care au loc într-un interval de o secundă**. Frecvența se măsoară în [1/s], unitate de măsură numită hertz, [Hz].

În Fig. 11.4 este arătată tensiunea alternativă sinusoidală de la bornele unui generator, $u = U_m \cdot \sin \omega t$, unde U_m este valoarea maximă sau amplitudinea tensiunii alternative u . Se vede că această tensiune are la anumite momente valoarea zero, la alte momente tensiunea este maximă pozitivă, la alte momente este maximă negativă, iar la alte momente este între valorile $-U_m$ și $+U_m$. Care este valoarea pe care o indică un voltmetru care este conectat la bornele generatorului? Dacă nu s-ar lua anumite măsuri constructive atunci, acul (indicatorul) unui voltmetru analogic care are indicația de zero volt la mijlocul scalei, ar oscila între $-U_m$ și $+U_m$ trecând și prin valoarea zero. Totuși noi știm că tensiunea de la prizele din locuințele noastre este de 220 V. Care este această valoare?

Ca să se răspundă la această întrebare se consideră un rezor care are rezistența electrică R și care este alimentat pe rând, odată cu o tensiune alternativă $u = U_m \cdot \sin \omega t$ și altă dată cu o tensiune continuă U . Intervalul de timp în care se alimentează rezorul de la tensiunea alternativă este egal cu intervalul de timp în care rezorul se alimentează de la tensiunea continuă și îl notăm cu t . Se pune problema aflării acelei valori a tensiunii continue U care aplicată la bornele rezorului, acesta să producă aceeași cantitate de căldură Q ca și în cazul în care ar fi aplicată tensiunea alternativă $u = U_m \cdot \sin \omega t$, în același interval de timp t . Se dorește deci să se găsească o valoare a unei tensiuni continue care să echivaleze din punct de vedere termic tensiunea alternativă. **Valoarea tensiunii continue care aplicată unui rezistor R , pentru un interval de timp t , ar produce aceeași cantitate de căldură Q ca și în cazul în care rezistorului i s-ar aplica o tensiune alternativă, de forma $u = U_m \cdot \sin \omega t$, pentru același interval de timp t , se numește valoarea efectivă a tensiunii alternative.** În cazul tensiunilor sinusoidale alternative valoarea tensiunii efective se notează cu litera U și este dată de relația (11.2):

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (11.2)$$

unde U_m este valoarea maximă sau amplitudinea tensiunii alternative.

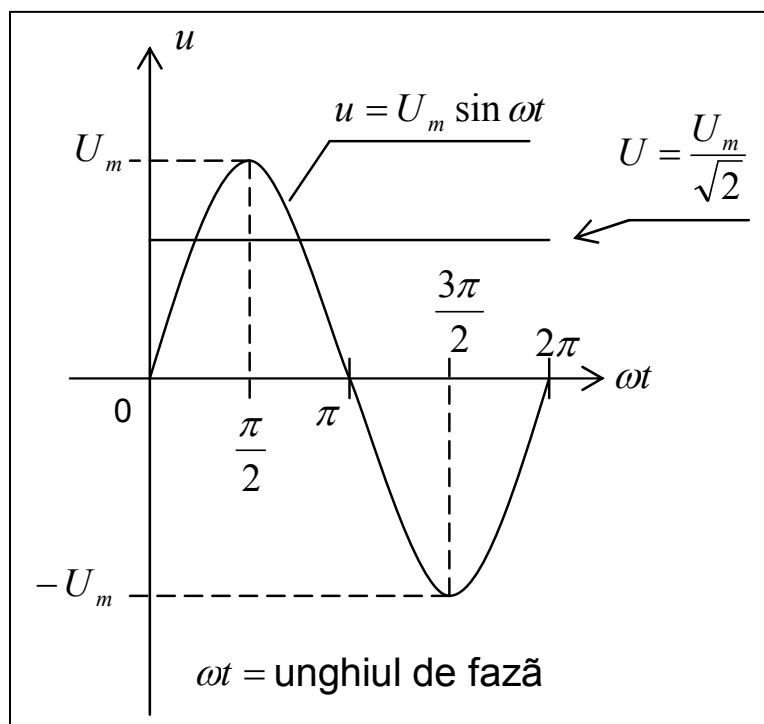


Fig. 11.4. Definiția valorii efective a unei tensiuni alternative

În Fig. 11.4 este arătată tensiunea alternativă $u = U_m \cdot \sin \omega t$ cât și valoarea efectivă a sa, U . Tensiunea de la prizele din locuințele noastre se poate scrie ca: $u = 311 \cdot \sin(2 \times 3.14 \times 50 \times t)$. Voltmetrele pentru măsurarea tensiunilor alternative, ca și ampermetrele pentru măsurarea curenților alternativi, sunt construite astfel încât să indice (arate) valorile efective ale tensiunilor alternative, sau ale curenților alternativi. Dacă valoarea efectivă a tensiunii de la prizele din locuințele noastre este 220 V, atunci valoarea maximă a aceleiași tensiuni este $220 \cdot \sqrt{2} = 311 \text{ V}$ (+311 V sau -311 V).

12. Rezistența electrică în curent alternativ

12.1 Circuit electric format dintr-o rezistență pur ohmică conectată la o tensiune alternativă

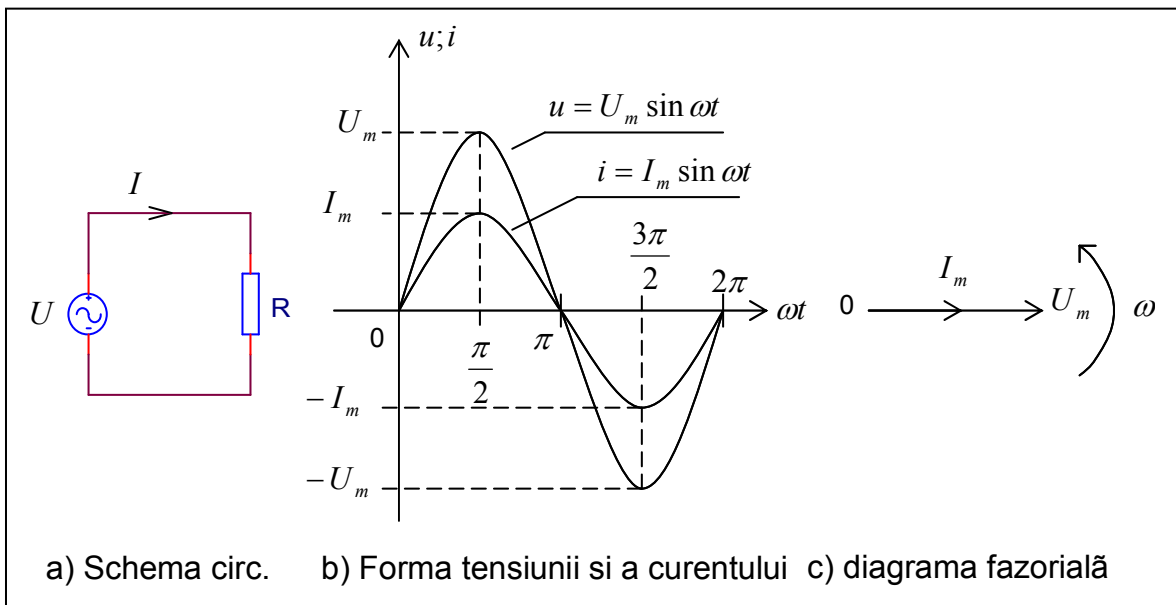


Fig. 12.1 Rezistență pură în circuit de curent alternativ

În Fig. 12.1a este arătată o rezistență pură R conectată la o sursă de tensiune alternativă cu valoarea efectivă U . Valoarea efectivă a curentului prin circuit este I . O rezistență ohmică pură este un rezistor care are numai rezistență ohmică și nu are inductanță sau capacități parazite.

În Fig. 12.1b este arătată forma tensiunii alternative a sursei, $u = U_m \cdot \sin \omega t$. Fie i valoarea instantanee a curentului electric prin circuit. Evident că tensiunea aplicată u trebuie să învingă doar căderea de tensiune pe rezistența R . Se poate scrie:

$$u = R \cdot i \quad \text{sau} \quad U_m \cdot \sin \omega t = R \cdot i, \text{ apoi:}$$

$$i = \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t \tag{12.1.1}$$

Din ecuatia (12.1.1) si din Fig. 12.1b se observă că si curentul prin circuit este de formă sinusoidală. Valoarea curentului este maximă atunci când $\sin \omega t = 1$.
Rezultă:

$$I_m = \frac{U_m}{R} \quad (12.1.2)$$

Cu notatia din relatia (12.1.2) ecuatia (12.1.1) a curentului devine:

$$i = I_m \cdot \sin \omega t \quad (12.1.3)$$

Comaprând ecuatia tensiunii, $u = U_m \cdot \sin \omega t$, cu ecuatia curentului $i = I_m \cdot \sin \omega t$, constatăm că **tensiunea si curentul sunt în fază**, pentru că au acelasi argument ωt al functiei sinus. Acest lucru a fost reprezentat grafic în Fig. 12.1b. Se vede că atunci când tensiunea este zero si curentul este tot zero, atunci când tensiunea este maximă si pozitivă si curentul este maxim si pozitiv, când tensiunea este maximă negativă si curentul este maxim si negativ. Din acest motiv se spune că tensiunea si curentul sunt în fază.

În Fig.12.1c a fost reprezentată “diagrama fazorială” a tensiunilor si curentilor din circuitul arătat în Fig. 12.1a, pentru momentul $t = 0$. De fapt au fost reprezentati doi vectori, unul care reprezintă tensiunea maximă U_m si altul care reprezintă valoarea maximă a curentului I_m , vectori care se rotesc în jurul punctului O cu aceeasi viteză unghiulară constanta ω . Pentru faptul că acesti vectori arată unghiul de fază dintre tensiune si curent, ei se numesc **fazori**. În Fig. 12.1c unghiul de fază dintre U_m si I_m este zero, pentru acest lucru spunem că tensiunea si curentul din circuitul analizat sunt în fază.

Pentru aflarea valorilor momentane ale tensiunii si curentului din circuitul arătat în Fig. 12.1a se va face proiectia celor doi fazori din fig. 12.1c pe o axă verticală care trece prin punctul O. Lungimile proiectiilor respective, la sacara de reprezentare aleasă, vor fi valorile momentane (instantanee) ale tensiunii si curentului.

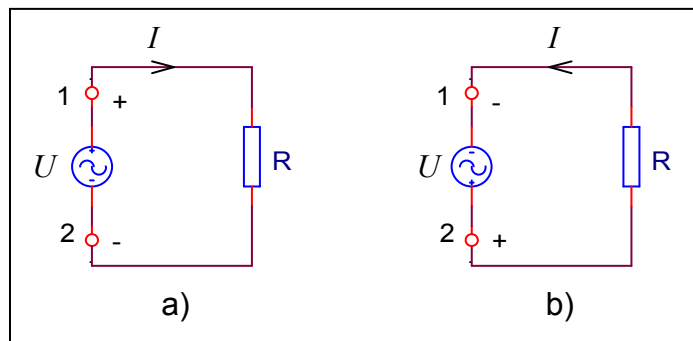


Fig. 12.2. Conventia pentru tensiuni si curenti pozitivi

Pentru desenarea fazorilor, cât și pentru trasarea curbelor tensiunii și curentului din Fig. 12.1b, c s-au ales scări de reprezentare atât pentru tensiune cât și pentru curent. De exemplu, pentru a reprezenta 100 V se folosește un segment de 1 cm, iar pentru a reprezenta un curent de 1 amper se folosește un segment de 0.5 cm.

Am vorbit de tensiune pozitivă și negativă, și de curent pozitiv și negativ. Acest lucru este rezultatul unei convenții, vezi Fig.12.2. Atâta timp cât borna 1 a generatorului din Fig. 12.2 este pozitivă și borna 2 este negativă, spunem că tensiunea generatorului este pozitivă și în această situație curentul prin circuit se consideră tot pozitiv, Fig. 12.2a. În cazul în care borna 2 este pozitivă și borna 1 negativă, se consideră că tensiunea este negativă, iar curentul prin circuit este invers ca în cazul precedent și se consideră a fi negativ, Fig. 12.2b.

Valorile efective ale tensiunii și curentului din circuitul arătat în Fig. 12.1.1a sunt:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (12.1.4)$$

12.2 Puterea într-un circuit rezistiv

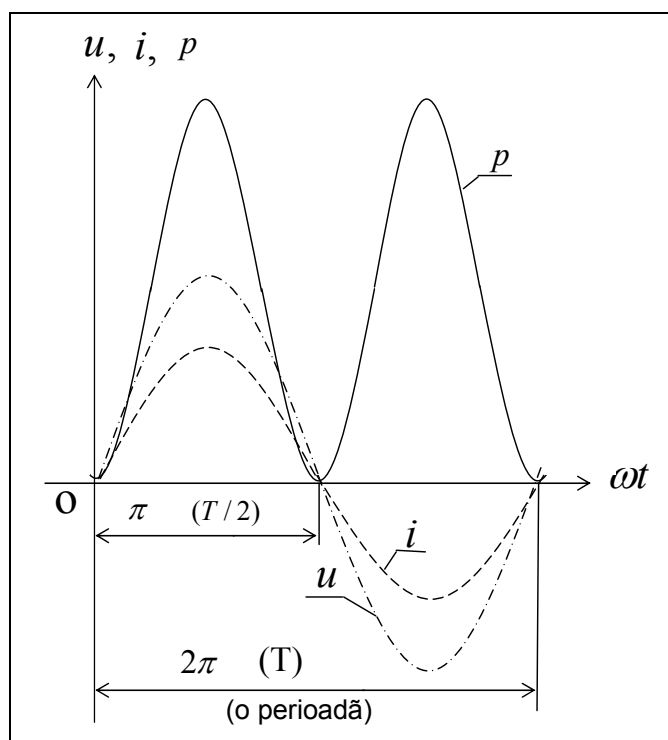


Fig. 12.3. Puterea instantanee într-un circuit rezistiv

Puterea consumată în circuitul din Fig. 12.1a este egală cu produsul dintre **valorile momentane (instantanee)** ale tensiunii și curentului, se notează cu litera mică p și este numită **puterea momentană** sau **putere instantanee**.

$$p = u \cdot i = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t \quad (12.2.1)$$

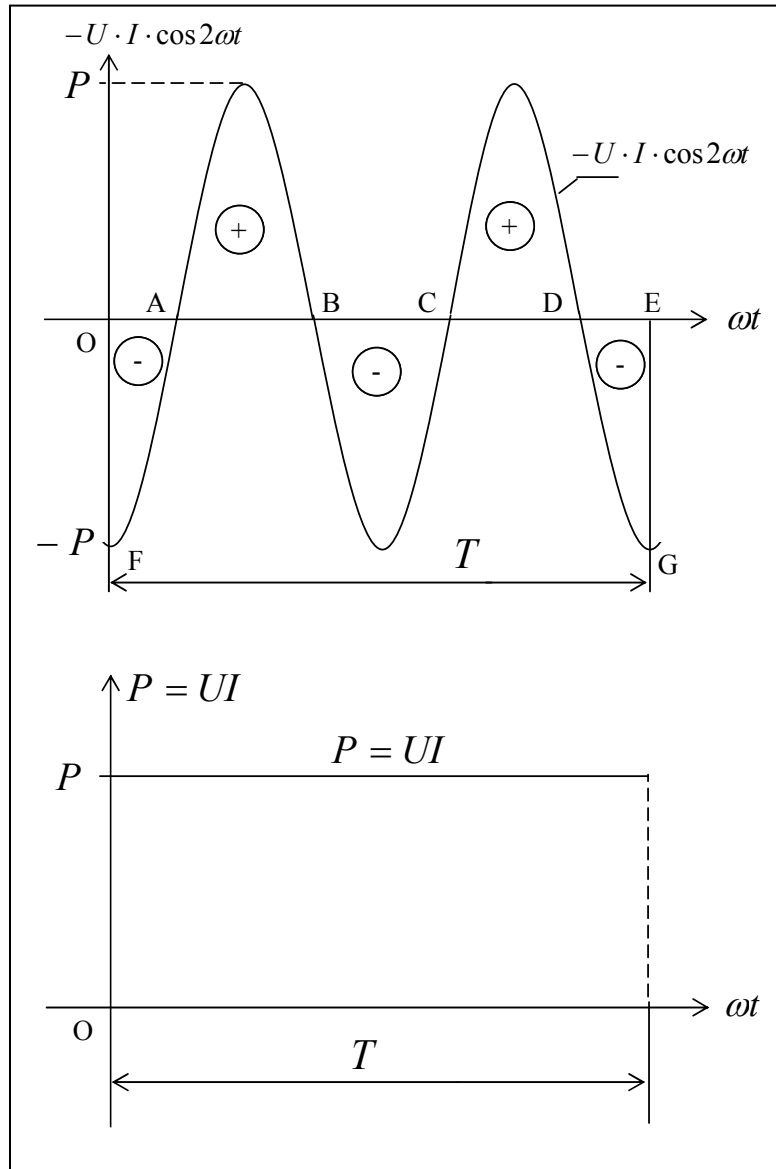


Fig.12.4. Cele două componente ale puterii momentane într-un circuit rezistiv, format dintr-o rezistență alimentată de la o tensiune alternativă

În Fig. 12.3 sunt reprezentate cu linii punctate curbele tensiunii și curentului prin circuitul rezistiv, reprezentat în Fig. 12.1a, și cu linie continuă curba p a puterii momentane în același circuit, pe durata unei perioade T . Se observă că curba p a puterii momentane este pozitivă pe toată durata perioadei T , această curbă este permanent deasupra axei orizontale $O - \omega t$. Pe prima jumătate de perioadă, când tensiunea și curentul sunt pozitive, produsul lor este tot pozitiv. Pe a doua jumătate de perioadă, atât tensiunea cât și curentul sunt negative, dar produsul lor

este tot pozitiv. Din acest motiv curba puterii momentane este pozitivă pe toată durata T unei perioade, această curbă nu coboară sub axa orizontală $O - \omega t$. Se mai observă că aceeași curbă a puterii momentane p are o frecvență dublă decât a curentului și tensiunii.

Prin definiție, puterea este energia consumată în unitatea de timp. Energia consumată de rezistorul cu rezistența R este transformată integral în căldură. De aceea se spune că, **rezistorul se opune curgerii curentului, dar în același timp disipă energia. Rezistorul cu rezistența R este un element de circuit disipativ.** Din Fig. 12.3 se observă că puterea consumată în rezistorul cu rezistența R nu este consumată în mod constant, ci este consumată în mod pulsatoriu, cu o frecvență dublă decât a tensiunii și curentului din circuit. De aceea spunem că **puterea momentană consumată într-un circuit rezistiv este pulsatorie.** Acest lucru se va vedea în continuare după câteva transformări matematice ale ecuației (12.2.1).

În matematică se demonstrează că $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$. Ecuația (12.2.1) devine:

$$p = U_m I_m \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (12.2.2)$$

Tinând cont de expresiile valorilor efective ale curentului și tensiunii, prezentate în ecuațiile (12.1.4) și de faptul că $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, ecuația (12.2.2) devine:

$$p = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \cos 2\omega t) = UI(1 - \cos 2\omega t) = UI - UI \cos 2\omega t \quad (12.2.3)$$

Analizând ecuația (12.2.3) se vede că puterea momentană are două componente, una constantă în timp, egală cu UI , notată cu P , și alta variabilă în timp, egală cu $-UI \cos 2\omega t$. Cele două componente ale puterii momentane sunt arătate în figura 12.4. Dacă se adună grafic curbele celor două componente, $P = UI$ și $-UI \cos 2\omega t$, prezentate în Fig. 12.4, se va obține curba p a puterii momentane arătată în Fig. 12.3.

Din ecuația (12.2.3) se vede că frecvența puterii momentane este dublă decât a tensiunii și curentului, pentru că argumentul funcției cosinus este $2\omega t$. Se poate scrie: $2\omega t = 2 \cdot (2\pi f) = 2\pi \cdot (2f)$, de unde se vede că frecvența este $2f$.

Dacă în circuitul din Fig. 12.1a s-ar monta un watmetru pentru măsurarea puterii consumate în circuit, și dacă nu s-ar lua anumite măsuri constructive asupra watmetrului, acel watmetru nu ar "ști" ce valoare a puterii să indice, pentru că puterea consumată este pulsatorie. De aceea watmetrele sunt construite ca să arate **puterea medie pe o perioadă** care se consumă în circuitul respectiv. Deasemenea, când se vorbește în general despre puterea consumată într-un

circuit alimentat cu tensiune alternativă, se înțelege că este vorba de puterea medie pe o perioadă.

Pentru aflarea puterii medii pe o perioadă, consumată de circuitul rezistiv analizat, vom folosi Fig. 12.4. Se vede că valoarea medie pe o perioadă a componentei variabile în timp “ $-UI \cos 2\omega t$ ” este zero. Întrădevăr, alternanța pozitivă cuprinsă între punctele A și B este anulată de alternanța negativă dintre punctele B și C, iar alternanța pozitivă dintre punctele C și D este anulată de suma celor două jumătăți de alternate negative cuprinse între punctele O și A, și D și E. Rezultă că valoarea medie pe durata perioadei T a componentei variabile în timp “ $-UI \cos 2\omega t$ ” este nulă. Analizând cealaltă componentă a puterii se vede că aceasta este constantă pe durata perioadei T , iar valoarea medie a ei este egală cu ea însăși $P = UI$. Deci:

Puterea medie pe o perioadă consumată într-un circuit rezistiv, care este numită și putere activă, este dată de relația:

$$P = UI \quad (12.2.4)$$

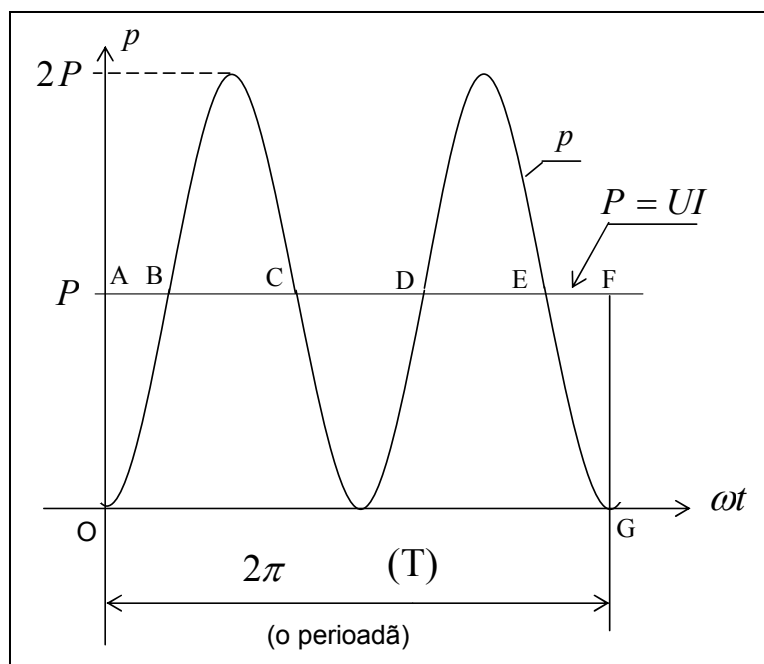


Fig.12.5. Puterea medie pe o perioadă

unde:

P = puterea medie pe o perioadă consumată într-un circuit rezistiv, [W];

U = valoarea efectivă a tensiunii alternative care alimentează circuitul, [V];

I = valoarea efectivă a curentului alternativ din circuitul rezistiv, [A].

Pentru circuitul din Fig.12.1a se mai poate scrie:

$$U = RI ; \quad I = \frac{U}{R} ;$$

Ecuatia (12.2.4) devine:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2 \quad (12.2.5)$$

În Fig. 12.5 este reprezentată curba p a puterii momentane și curba (dreaptă) P a puterii medii pe o perioadă. Puterea medie consumată de circuitul rezistiv pe durata unei perioade T este proporțională cu aria cuprinsă între axa orizontală $O-\omega t$ și curba p a puterii momentane. Această arie este egală cu aria dreptunghiului OAFG. Întrădevăr, aria vârfului de sinusoidă cuprinsă între punctele B și C este egală cu aria părții de sinusoidă cuprinsă între punctele C și D, iar aria vârfului de sinusoidă cuprinsă între punctele D și E este egală cu suma ariilor jumătăților de sinusoidă cuprinse între punctele A și B și E și F. Rezistorul cu rezistența R va produce aceeași cantitate de căldură Q pe durata T a unei perioade, fie că puterea consumată este pulsatorie, așa cum arată curba p a puterii momentane, fie că puterea consumată este constantă, așa cum arată dreapta P a puterii medii pe o perioadă. Din Fig. 12.5 se observă că puterea momentană p oscilează în jurul puterii medii pe o perioadă, P . Valoarea maximă a puterii momentane este $2P$, iar valoarea minimă este zero.

Exemplu de numeric: O tensiune sinusoidală cu valoarea maximă (amplitudinea) 141.42 V este aplicată unui circuit rezistiv în care rezistența este 50 Ω . Să se afle puterea disipată în acel circuit.

$$\text{Soluție: } U_m = 141.42 \text{ V}; \quad U = \frac{141.42}{\sqrt{2}} = \frac{141.42}{1.4142} = 100 \text{ V}; \quad I = \frac{U}{R} = \frac{100}{50} = 2 \text{ A}$$

$$P = UI = 100 \cdot 2 = 200 \text{ W}; \quad P = \frac{U^2}{R} = \frac{100^2}{50} = \frac{10000}{50} = 200 \text{ W};$$

$$P = RI^2 = 50 \cdot 2^2 = 200 \text{ W}$$

13 Bobina în curent alternativ

13.1 Circuit electric format dintr-o inductanță pură conectată la o tensiune alternativă

Printr-o **inductanță pură** se înțelege o bobină (inductor) a cărei rezistență ohmică este nulă, $R = 0$. Rezultă că și pierderile în bobină sunt nule, $RI^2 = 0$. O astfel de bobină nu există în realitate, dar în anumite situații rezistența ohmică a bobinei se poate neglija. Dacă rezistența bobinei nu se poate neglija, atunci reprezentarea ei în schemele electrice se face printr-o inductanță, presupusă fără rezistență, în serie cu o rezistență care este egală cu rezistența bobinei.

În paragrafele 3 și 4 s-a văzut că, prezenta unei bobine într-un circuit de curent continuu se opune variației curentului prin bobină, fenomen cauzat de tensiunea electromotoare autoindusă în bobină.

În cazul unui circuit care conține o bobină (inductor), care are numai inductanță, alimentat cu tensiune alternativă, fenomenele sunt identice. Atunci când tensiunea de alimentare crește de la zero la valoarea maximă pozitivă, forțând apariția unui curent care are tendința să crească, în bobină se autoinduce o t.e.m. care se va opune creșterii curentului în circuit. Atunci când tensiunea de alimentare începe să scadă de la valoarea maximă pozitivă spre zero, curentul absorbit de la sursă are tendința să scadă, dar t.e.m. autoindusă se va opune scăderii curentului din circuit. Fenomenele se petrec asemănător și când tensiunea de alimentare crește de la zero la valoarea maximă negativă, sau când descrește de la valoarea maximă negativă la zero.

Pentru că în curent alternativ polaritatea generatorului se schimbă periodic, curentul dintr-un circuit care conține numai o inductanță pură va rămâne în permanentă în urma tensiunii de alimentare cu **un sfert de perioadă**, vezi Fig. 13.1.

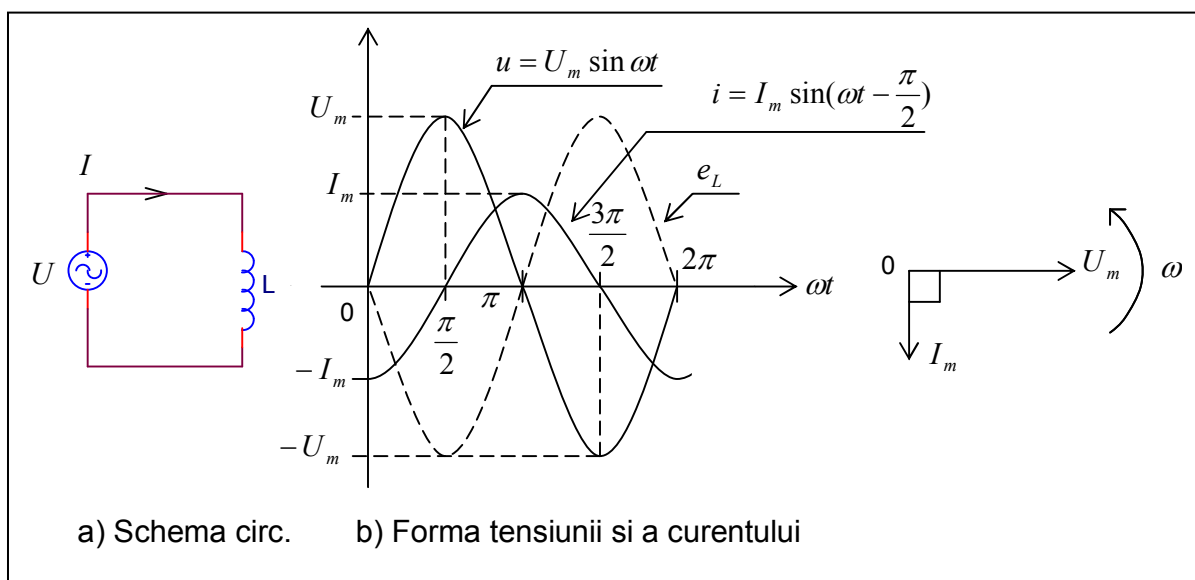


Fig. 13.1. Inductanță pură în circuit de curent alternativ

În Fig. 13.1a este arătat un generator de tensiune alternativă, cu valoarea efectivă U , care alimentează o inductanță pură (o bobină fără rezistență) cu valoarea L . În Fig. 13.1b sunt reprezentate: tensiunea alternativă u a sursei, curentul alternativ i din circuit și tensiunea electromotoare e_L autoindusă în bobină. Se observă că t.e.m. autoindusă în bobină, e_L , se opune în orice moment tensiunii de alimentare. Se mai observă, de asemenea, că pentru $\omega t = 0$, tensiunea sursei are valoarea zero, dar curentul atinge valoarea zero după $\pi/2$ radiani, adică după un sfert de perioadă, $T/4$, moment în care tensiunea atinge valoarea maximă pozitivă. Când tensiunea devine zero, curentul atinge valoarea maximă pozitivă, exact după $\pi/2$ radiani, sau după un sfert de perioadă, $T/4$, de la valoarea maximă a tensiunii. Rezultă că:

Într-un circuit de curent alternativ, în care este doar o inductanță pură, curentul prin circuit este defazat cu $\pi/2$ radiani (90°), sau cu un sfert de perioadă $T/4$, în urma tensiunii aplicate circuitului.

Acest lucru se vede mai bine în Fig. 13.1c, care a fost desenată pentru $t = 0$. În poziția din figură, proiecția celor doi vectori pe o axă verticală care ar trece prin punctul O, ar arăta că tensiunea momentană este zero, în timp ce curentul este maxim dar negativ, adică curge în sens invers, opunându-se creșterii curentului prin circuit.

Recapitulând, se poate spune că ori de câte ori o tensiune alternativă este aplicată unei inductanțe pure, în bobină se autoinduce o **tensiune contra electromotoare** care se opune în orice moment creșterii sau scăderii curentului din circuit. Pentru că circuitul este presupus fără rezistență ohmică, tensiunea aplicată trebuie să învingă numai tensiunea electromotoare autoindusă.

Cum tensiunea sursei $u = U_m \sin \omega t$ este totdeauna opusă tensiunii autoinduse

$e_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$, se poate scrie:

$$U_m \sin \omega t = -(-L \frac{\Delta i}{\Delta t}) = L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (13.1.1)$$

Matematicienii au rezolvat ecuația (13.1.1) în raport cu curentul i și au obținut:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_m}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (13.1.2)$$

unde s-a făcut notația $\omega L = X_L$.

Valoarea maximă a curentului se obține atunci când $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$. În această situație valoarea maximă a curentului devine:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} \quad (13.1.3)$$

Cu această notație, ecuația (13.1.2) devine:

$$i = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (13.1.4)$$

Faptul că în circuitul analizat curentul rămâne în urma tensiunii aplicate se vede și din ecuația (13.1.4), unde argumentul funcției sinus este $\omega t - \frac{\pi}{2}$, în timp ce

tensiunea aplicată are ecuația $u = U_m \sin \omega t$, unde argumentul funcției sinus este doar ωt . Pentru $t = 0$, $\sin(\omega \cdot 0 - \frac{\pi}{2}) = -1$ și $\sin \omega \cdot 0 = 0$

Din ecuația (13.1.2) se vede că ωL joacă rolul unei “rezistente”. Acest termen este numit **reactanța inductivă a bobinei**, este notat cu X_L și este măsurat în ohm [Ω], dacă L se măsoară în henry [H] și ω în radiani pe secundă, [rad/s].

Într-un circuit format dintr-o inductanță pură, alimentat la o tensiune alternativă, curentul este limitat numai de reactanța inductivă a bobinei.

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (13.1.5)$$

Din ecuația (13.1.5) se vede că reactanța inductivă este direct proporțională cu frecvența tensiunii aplicate. Cu cât frecvența tensiunii aplicate este mai mare, cu atât reactanța inductivă a unei bobine este mai mare, și invers. Dacă frecvența este zero, adică circuitul este alimentat în curent continuu, reactanța inductivă a bobinei devine zero.

Cu alte cuvinte, **într-un circuit de curent alternativ, care conține o bobină (inductanță), schimbarea mărimii și sensului curentului prin circuit dă naștere la o tensiune electromotoare autoindusă care se opune curgerii curentului. Efectul de opoziție asupra curgerii curentului este numit reactanță inductivă, are simbolul X_L și este măsurată în ohm.**

Exemplu: O tensiune de 220 V, 50 Hz este aplicată unei bobine cu inductanța 0.22 H. Să se afle curentul din circuit.

Soluție: $X_L = 2\pi f L = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 0.22 = 69.115 \Omega$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{69.115} = 3.18 \text{ A}$$

13.2 Puterea într-un circuit cu inductanță pură

Într-un circuit cu inductanță pură, ca cel din Fig. 13.1a, puterea momentană consumată de circuit este dată tot de produsul dintre tensiune și curent, adică $p = ui$. Înlocuind în formula p puterii momentane, tensiunea momentană u și curentul momentan i , se obține:

$$p = ui = (U_m \sin \omega t) \times [I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})] = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (13.2.1)$$

Matematica demonstrează că:

$$\sin \omega t \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sin 2\omega t}{2} \quad (13.2.2)$$

Tinând cont de expresiile valorilor efective ale curentului si tensiunii, prezentate în ecuațiile (12.1.4) și de faptul că $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, ecuația (13.2.1) devine:

$$p = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot (-\sin 2\omega t) = U \cdot I \cdot (-\sin 2\omega t) \quad (13.2.3)$$

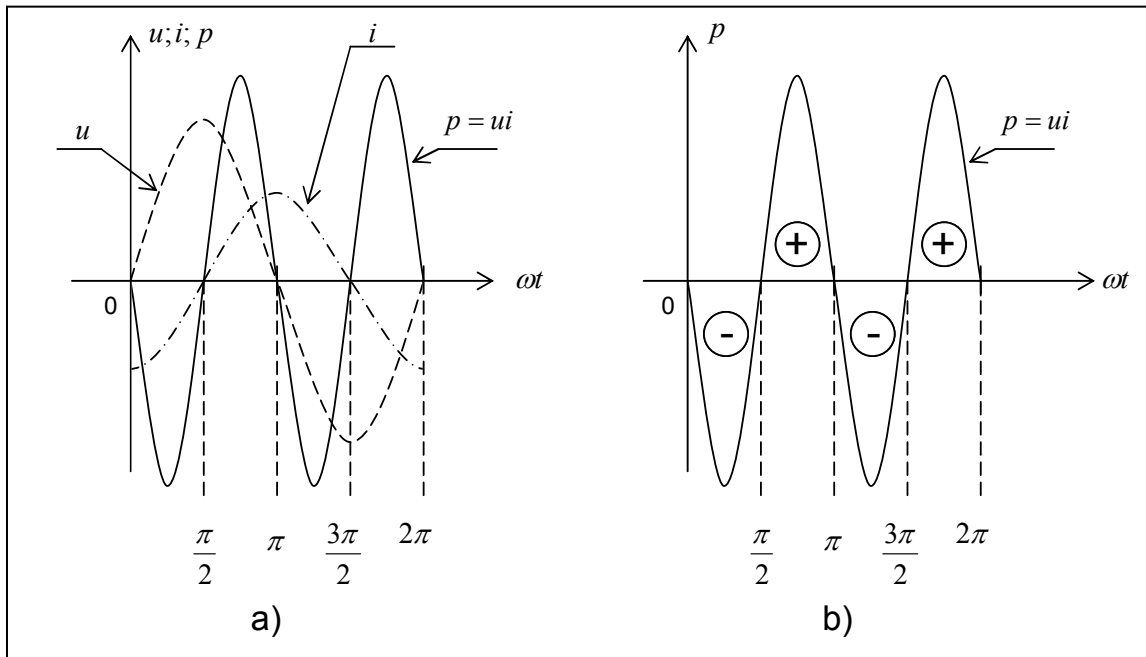


Fig. 13.2. Puterea într-un circuit cu inductanță pură, alimentat cu tensiune alternativă

Ecuația (13.2.3) a puterii momentane într-un circuit cu inductanță pură este reprezentată grafic în Fig. 13.2a. Curba puterii momentane are o frecvență dublă decât a tensiunii și curentului. Pe primul sfert de perioadă, adică de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ (sau de la 0 la $T/4$), tensiunea este pozitivă și curentul este negativ, de aceea produsul lor este negativ. De la $\frac{\pi}{2}$ la π (sau de la $T/4$ la $T/2$), atât tensiunea cât și curentul sunt pozitive și de aceea produsul lor este pozitiv. De la π la $\frac{3\pi}{2}$ (de la $T/2$ la $3T/4$) tensiunea este negativă și curentul pozitiv, deci produsul lor este negativ. De la $\frac{3\pi}{2}$ la 2π (de la $3T/4$ la T) atât tensiunea cât și curentul sunt negative, deci produsul lor este pozitiv. În Fig. 13.2b este arătată numai curba puterii momentane. Puterea medie pe o perioadă este proporțională cu aria cuprinsă între axa orizontală $O - \omega t$ și curba puterii momentane. Se vede că, sunt două arii negative, și două arii pozitive, care se anulează reciproc pe durata unei perioade. Rezultă că:

Puterea medie pe o perioadă consumată de un circuit format numai dintr-o inductanță pură, alimentat la o tensiune alternativă, este zero, $P = 0$.

Puterea momentană are intervale de timp în care este pozitivă și intervale de timp în care este negativă. În acele intervale de timp în care puterea este pozitivă, ea este “absorbită” de inductanță de la sursă, iar în momentele în care este negativă, puterea este returnată sursei. În momentele în care puterea momentană este pozitivă, energia absorbită de la sursă este “înmagazinată” în câmpul magnetic al bobinei. În momentele în care puterea momentană este negativă, câmpul magnetic al bobinei colapsează și energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei este returnată sursei. Din această cauză, în decurs de o perioadă energia consumată de la sursă, deci și puterea medie pe o perioadă, este nulă. Bobina nu disipă energie, energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei NU este transformată în căldură, ca în cazul unui rezistor. Această diferență dintre un rezistor și o bobină a condus la denumirea de reactanță inductivă pentru a descrie faptul că o bobină se opune curgerii curentului dar nu disipă energie.

14. Condensatorul în alternativ

14.1 Circuit electric format dintr-o capacitate pură conectată la o tensiune alternativă

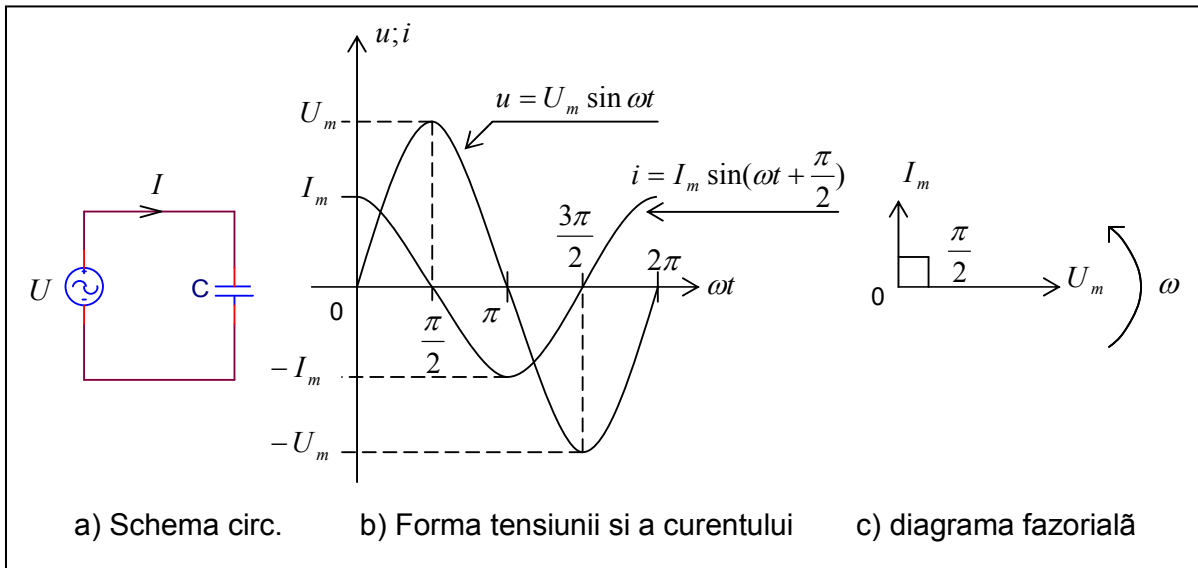


Fig. 14.1 Capacitate pură într-un circuit de curent alternativ

Printr-o **capacitate pură** se înțelege un condensator care are numai capacitate, fără să aibă rezistență de pierderi între cele două armături, sau altfel spus, rezistența dintre armături să fie infinit de mare. În acest caz nu va exista un curent de pierderi între cele două armături, deci nu vor fi pierderi de energie sub forma RI^2 , deoarece $I = 0$.

În paragrafele 5 și 6 s-a văzut că într-un circuit care conține un condensator, alimentat la o tensiune continuă, există curent în circuit doar pe durata încărcării sau a descărcării condensatorului, durată care este foarte mică, $\tau = 5RC$. În restul timpului curentul prin circuit este zero și de aceea se poate spune că un condensator se opune cu o rezistență infinit de mare curgerii curentului continuu prin circuit.

În Fig. 14.1a s-a reprezentat un condensator, care are numai capacitate, alimentat la o tensiune alternativă. Deosebirea dintre o sursă de tensiune continuă și una alternativă este că sursa alternativă își schimbă în mod periodic polaritatea, vezi Fig. 12.1.2. Din această cauză, **într-un circuit cu condensator alimentat la tensiune alternativă, ca cel din Fig. 14.1a, va exista tot timpul un curent care să încarce sau să descarce condensatorul. Curentul NU trece prin spațiul dintre armăturile condensatorului, curentul pleacă de la sursă spre condensator, până când condensatorul se încarcă, apoi când sursa își schimbă polaritatea, condensatorul se descarcă și se încarcă cu polaritate inversă.**

Cu cât capacitatea condensatorului este mai mare, cu atât curentul din circuit, pentru încărcarea și descărcarea condensatorului, va fi mai mare și invers, cu cât capacitatea condensatorului este mai mică, cu atât curentul din circuit, pentru încărcarea și descărcarea condensatorului, va fi mai mic. Putem spune astfel că, un condensator opune o "rezistență" curentului prin circuit, în funcție de mărimea capacității sale, dar nu consumă energie, spre deosebire de un rezistor care se opune curgerii curentului prin circuit, dar consumă și energie. Datorită acestei deosebiri dintre un condensator și un rezistor, pentru opoziția pe care condensatorul o oferă în calea curgerii curentului electric nu s-a mai folosit termenul de rezistență, ci s-a folosit termenul de **reactanță capacitivă**.

Asa cum s-a văzut în paragrafele 5 și 6, curentul într-un circuit cu condensator atinge valoarea maximă "înaintea" tensiunii de la bornele condensatorului, sau altfel spus, tensiunea de la bornele condensatorului rămâne în urma curentului din circuitul în care este conectat. Pentru curent alternativ, acest lucru este ilustrat în Fig. 14.1b. În momentul în care tensiunea în circuit începe să crească, curentul de încărcare al condensatorului este maxim. Când tensiunea a devenit maximă, curentul din circuit a devenit zero, momentul $\pi/2$, sau $T/4$ și așa mai departe. Rezultă că:

Într-un circuit cu condensator, alimentat la o tensiune alternativă, curentul din circuit este defazat înaintea tensiunii aplicată circuitului cu $\pi/2$ radiani (90°), sau cu $T/4$.

Acest lucru rezultă și matematic. Se știe că definiția capacității C a unui condensator este dată de raportul dintre sarcina electrică q acumulată pe armăturile condensatorului și tensiunea u de la bornele condensatorului:

$$C = \frac{q}{u} \quad q = Cu \quad (14.1.1)$$

Dar $u = U_m \cdot \sin \omega t$. Rezultă $q = C \cdot U_m \cdot \sin \omega t$

Curentului electric este definit ca variația sarcinii electrice din circuit în unitatea de timp. Rezultă:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta(CU_m \sin \omega t)}{\Delta t} = CU_m \frac{\Delta(\sin \omega t)}{\Delta t} \quad (14.1.2)$$

Matematicienii au demonstrat că:

$$\frac{\Delta(\sin \omega t)}{\Delta t} = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14.1.3)$$

În acest caz, relația (14.1.2) pentru curent, devine:

$$i = \omega CU_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14.1.4)$$

Se face notația:

$$\frac{1}{\omega C} = X_c \quad (14.1.5)$$

Relația (14.1.4) pentru curent, devine:

$$i = \frac{U_m}{X_c} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14.1.6)$$

Factorul X_c joacă rol de “rezistentă” în circuitul cu condensator, se numește **reactanță capacitivă**, este măsurată în ohm [Ω], dacă ω se măsoară în [rad/s] și C în farad, [F].

Din expresia (14.1.6) se vede că valoarea curentului este maximă dacă $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ devine unitar. Rezultă:

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{X_c} \quad (14.1.7)$$

Ecuatia (14.1.6) pentru curent, devine:

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14.1.8)$$

Din cele de mai sus rezumăm ecuațiile tensiunii de alimentare și a curentului din circuit:

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14.1.9)$$

Faptul că în circuitul analizat curentul atinge valoarea maximă înaintea tensiunii aplicate se vede și din ecuația (14.1.9), unde pentru curent, argumentul funcției sinus este $\omega t + \frac{\pi}{2}$, în timp ce pentru tensiunea aplicată argumentul funcției sinus este doar ωt . Pentru $t = 0$, $\sin(\omega \cdot 0 + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ și $\sin \omega \cdot 0 = 0$. Acest lucru se vede și din figurile 14.1b și 14.1c.

Din ecuația (14.1.6) rezultă că:

Într-un circuit format dintr-un condensator cu capacitate pură, alimentat la o tensiune alternativă, curentul este limitat numai de reactanța capacitivă a condensatorului.

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (14.1.10)$$

Din ecuația (14.1.10) se vede că reactanța capacitivă a unui condensator este invers proporțională cu frecvența tensiunii aplicate și cu mărimea capacității C . Cu cât frecvența tensiunii aplicate este mai mare, cu atât reactanța capacitivă a unui condensator este mai mică, și invers. Deasemenea, cu cât capacitatea este mai mare, cu atât reactanța capacitivă a condensatorului va fi mai mică. Dacă frecvența este zero, adică circuitul este alimentat în curent continuu, reactanța capacitivă a condensatorului devine infinit de mare, afirmație evidentă, pentru că condensatorul opune o rezistență infinită curgerii curentului continuu.

Cu alte cuvinte, într-un circuit de curent alternativ, care conține un condensator, schimbarea polarității tensiunii generatorului determină un curent prin circuit pentru încărcarea și descărcarea condensatorului. Efectul de opoziție asupra curgerii curentului este numit reactanță capacitivă, are simbolul X_c și este măsurat în ohm.

Exemplu numeric: Să se calculeze curentul absorbit de un condensator cu capacitatea de $2 \mu F$ alimentat la o tensiune de 220 V, 50 Hz.

Soluție: $C = 2 \mu F = 2 \cdot 10^{-6} F$; $U = 220 V$; $f = 50 Hz$; Rezultă:

$$I = \frac{U}{X_c} = \frac{U}{\frac{1}{2\pi f C}} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot U \cdot C = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 220 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0,138 A = 138 mA$$

14.2 Puterea într-un circuit cu capacitate pură

Într-un circuit cu capacitate pură, ca cel din Fig. 14.1a, puterea momentană consumată de circuit este dată de produsul dintre tensiune și curent, adică $p = ui$. Înlocuind în formula p a puterii momentane, tensiunea momentană u și curentul momentan i , se obține:

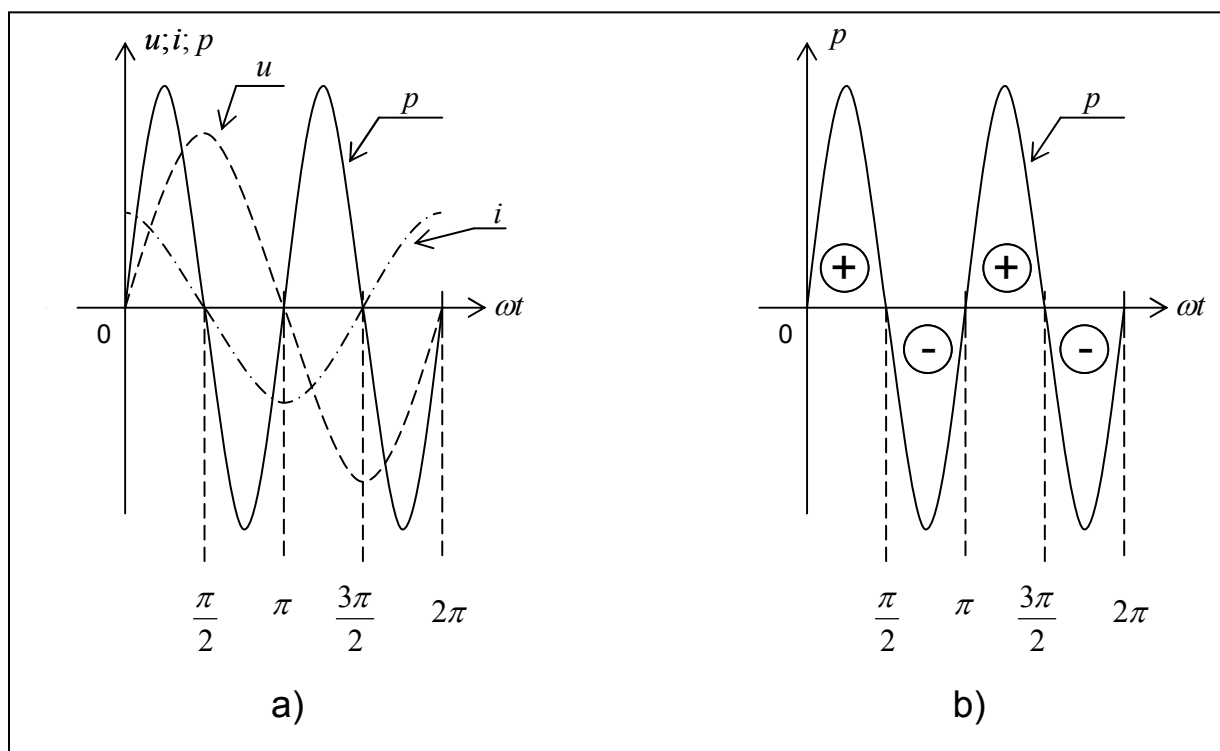


Fig. 14.2 Puterea într-un circuit cu capacitate pură, alimentat cu tensiune alternativă

$$p = ui = (U_m \sin \omega t) \times [I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})] = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (14.2.1)$$

Matematica demonstrează că:

$$\sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin 2\omega t}{2} \quad (14.2.2)$$

Tinând cont de expresiile valorilor efective ale curentului si tensiunii, prezentate în ecuatiile (12.1.4) si de faptul că $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, ecuatia (14.2.2) devine:

$$p = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \sin 2\omega t = U \cdot I \cdot \sin 2\omega t \quad (14.2.3)$$

Ecuatia (14.2.3) a puterii momentane într-un circuit cu inductanță pură este reprezentată grafic în Fig. 14.2a. Curba puterii momentane are o frecvență dublă decât a tensiunii si curentului. Pe primul sfert de perioadă, adică de la 0 la $\pi/2$ (sau de la 0 la $T/4$), tensiunea si curentul sunt pozitive, de aceea produsul lor este pozitiv. De la $\pi/2$ la π (sau de la $T/4$ la $T/2$), tensiunea este pozitivă si curentul este negativ si de aceea produsul lor este negativ. De la π la $3\pi/2$ (de la $T/2$ la $3T/4$) tensiunea si curentul sunt negative, deci produsul lor este pozitiv. De la $3\pi/4$ la 2π (de la $3T/4$ la T) tensiunea este negativă si curentul pozitiv, deci produsul lor este negativ.

În Fig. 14.2b este arătată numai curba puterii momentane. Puterea medie pe o perioadă este proporțională cu aria cuprinsă între axa orizontală $O - \omega t$ si curba puterii momentane. Se vede că, sunt două arii negative, si două arii pozitive, care se anulează reciproc pe durata unei perioade. Rezultă că:

Puterea medie pe o perioadă consumată de un circuit format numai dintr-o capacitate pură, alimentat la o tensiune alternativă, este zero, $P = 0$.

Puterea momentană are intervale de timp în care este pozitivă si intervale de timp în care este negativă. În acele intervale de timp în care puterea este pozitivă, ea este "absorbită" de condensator de la sursă, iar în momentele în care este negativă, puterea este returnată sursei. În momentele în care puterea momentană este pozitivă, energia absorbită de la sursă este "înmagazinată" în câmpul electric care se formează între armăturile condensatorului. În momentele în care puterea momentană este negativă, câmpul electric dintre armăturile condensatorului colapsează si energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului este returnată sursei. Din această cauză, în decurs de o perioadă energia consumată de la sursă, deci si puterea medie pe o perioadă, este nulă. Condensatorul nu disipă energie, energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului NU este transformată în căldură, ca în cazul unui rezistor. Această diferență dintre un rezistor si un condensator a condus la denumirea de reactanță capacitivă pentru a descrie faptul că un condensator se opune curgerii curentului dar nu disipă energie.

15. Circuit serie R-L-C

15.1 Circuit electric serie format dintr-o rezistentă, o inductanță și o capacitate, alimentat în alternativ

Circuitul din Fig. 15.1 constă dintr-un rezistor cu rezistența R , o bobină (un inductor) cu inductanța L și un condensator cu capacitatea C , conectate în serie. Se consideră că atât condensatorul cât și bobina nu au pierderi, adică rezistența de izolație dintre armăturile condensatorului este foarte bună, lucru ușor de realizat pentru condensator, iar bobina se consideră fără rezistență. Cum o bobină nu poate fi confecționată decât dintr-un conductor (cupru sau argint) care are totuși o rezistență mică, dar diferită de zero, se consideră că rezistența bobinei este inclusă în rezistența R a rezistorului din circuitul analizat.

Generatorul care alimentează circuitul este de tensiune alternativă. Principali parametri din circuit sunt:

$$u = U_m \sin \omega t = \text{valoarea momentană a tensiunii generatorului, [V];}$$

U = valoarea efectivă a tensiunii generatorului, [V];

I = valoarea efectivă a curentului prin circuitul serie, [A]

$U_R = IR$ = căderea de tensiune pe rezistența din circuit, [V];

$U_L = IX_L$ = căderea de tensiune pe reactanța inductivă a bobinei, [V];

$U_C = IX_C$ = căderea de tensiune pe reactanța capacitivă a condensatorului, [V];

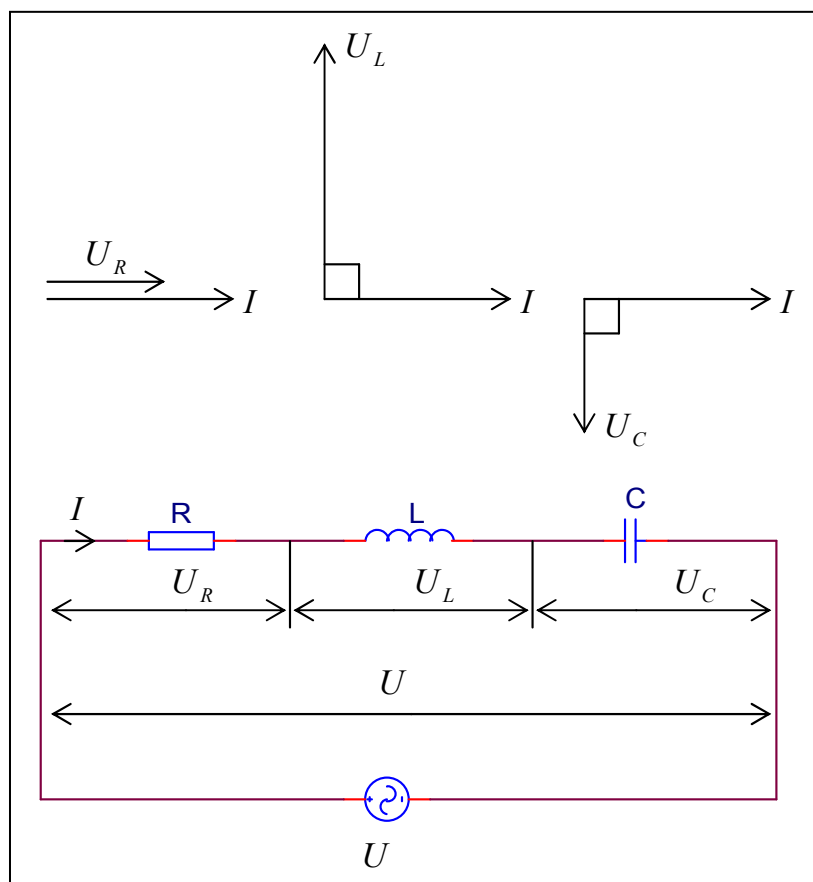


Fig. 15.1 Circuit serie R-L-C alimentat la tensiune alternativă

Diagramele fazoriale prezentate în Fig. 15.1 au fost construite cu valorile efective ale curentului și tensiunilor. Dacă aceste valori se vor înmulți cu $\sqrt{2}$ se vor obține diagramele fazoriale formate din vectori (fazori) care reprezintă valorile maxime ale mărimilor menționate.

Elementul comun în circuitul prezentat este curentul. Din acest motiv curentul a fost reprezentat printr-un fazor (vector) orizontal, așezat deasupra fiecărui element de circuit, fiind considerat un fazor de referință. Se înțelege că pentru reprezentarea curentului și a tensiunilor s-au utilizat două scări, una pentru curent și alta pentru tensiuni. Se vede că tensiunea pe rezistență R este în fază cu curentul, conform celor spuse la paragraful 12.1. Curentul prin bobină este defazat cu 90° ($\pi/2$, sau $T/4$) în urma tensiunii de la bornele bobinei, în conformitate cu cele spuse la paragraful 13.1, iar curentul prin condensator este defazat cu 90° ($\pi/2$, sau $T/4$) înaintea tensiunii de la bornele condensatorului, în conformitate cu cele spuse la paragraful 14.1.

Deoarece căderile de tensiune de pe elementele de circuit: rezistență, inductanță și condensator nu sunt în fază, ele nu se pot aduna numeric. Din acest motiv tensiunea generatorului nu se poate afla prin simpla adunare a căderilor de tensiune de pe cele trei elemente. Aceste tensiuni se adună vectorial sau geometric, ca în Fig. 15.2a.

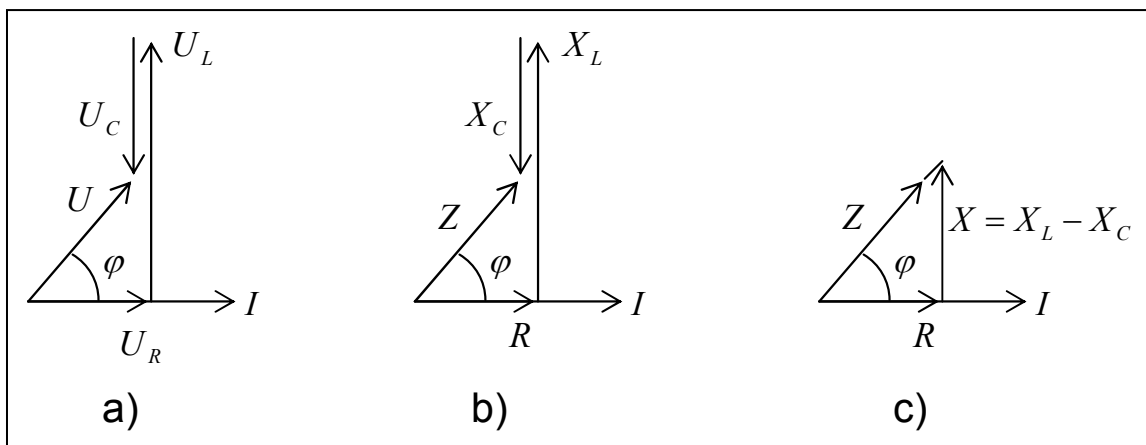


Fig. 15.2. Diagrama fazorială a căderilor de tensiune

În Fig. 15.2a s-au reprezentat tensiunile din circuit în raport cu fazorul de referință, care este curentul. Se observă că tensiunea U de alimentare a circuitului a fost obținută prin suma vectorială, numită și sumă geometrică, a căderilor de tensiune din circuit.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic din Fig. 15.2a, care este numit și **triunghiul tensiunilor**, se obține:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (15.1.1)$$

Exprimând căderile de tensiune prin produsul dintre curent și rezistență, curent și reactanța inductivă și curent și reactanța capacitivă, $U_R = IR$, $U_L = IX_L$, $U_C = IX_C$ se obține:

$$U = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = \sqrt{I^2[R^2 + (X_L - X_C)^2]} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (15.1.2)$$

Din ecuația (15.1.2) rezultă curentul I prin circuit:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{Z} \quad \text{sau} \quad U = ZI \quad (15.1.3)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (15.1.4)$$

Analizând relațiile (15.1.3) și (15.1.4) se observă că termenul $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, care a primit numele de **impedantă** a circuitului, joacă un rol de "rezistență" în circuit, limitând curentul. Unitatea de măsură pentru impedanță este ohm [Ω]. Se poate afirma că:

Într-un circuit de curent alternativ, impedanța reprezintă acțiunea combinată a elementelor de circuit, de opoziție în calea curgerii curentului electric.

Se notează:

$$X = X_L - X_C \quad (15.1.5)$$

unde X reprezintă **reactanța netă** a circuitului, care poate fi inductivă sau capacitivă, în funcție de care dintre X_L și X_C este mai mare.

Cu notația din relația (15.1.5), impedanța devine:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (15.1.6)$$

Curentul I apare în expresia tensiunilor menționate în Fig. 15.1.1a, $U_R = IR$, $U_L = IX_L$, $U_C = IX_C$. Dacă fiecare dintre aceste tensiuni va fi împărțită la valoarea I a curentului, se obține:

$$R = \frac{U_R}{I}; \quad X_L = \frac{U_L}{I} \quad X_C = \frac{U_C}{I} \quad Z = \frac{U}{I} \quad (15.1.7)$$

Tinând cont de relațiile (15.1.7), în Fig. 15.2b și 15.2c este arătat **triunghiul impedanțelor**, evident utilizându-se altă scară de reprezentare pentru “impedante”. Din triunghiul impedanțelor, ca și din relația (15.1.4) se vede că:

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \quad (15.1.8)$$

În Fig. 15.2a se observă că între tensiunea U aplicată circuitului și curentul I din circuit există un unghi φ numit **unghi de defazaj**, curentul fiind în urma tensiunii. Acest unghi de defazaj arată că în circuitul analizat, curentul rămâne în urma tensiunii aplicate. De la momentul în care tensiunea trece prin zero, de la negativ spre pozitiv și până în momentul în care și curentul trece prin zero, tot de la negativ spre pozitiv, va trece un timp t care rezultă din relația:

$$\varphi = \omega t \quad t = \frac{\varphi}{\omega} \quad (15.1.9)$$

În relațiile (15.1.9) unitățile de măsură sunt: φ [rad], ω [rad/s], t [s]. Este mai ușor să se lucreze cu defazajul φ decât cu timpul t . Defazajul mai poate fi măsurat și din momentul în care tensiunea devine maximă pozitivă și până la momentul în care curentul devine maxim pozitiv.

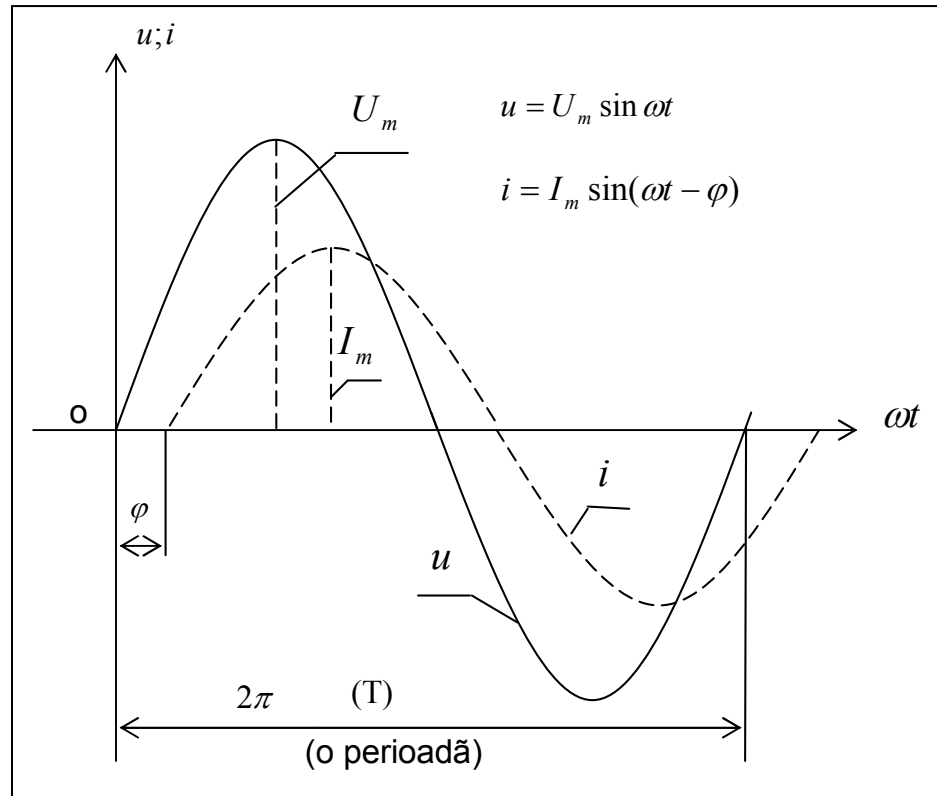


Fig. 15.3. Defazajul φ dintre tensiunea alternativă u , aplicată unui circuit serie R-L-C, și curentul i din circuit.

Ecuatiile tensiunii aplicate circuitului si a curentului prin circuit sunt:

$$u = U_m \sin \omega t \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (15.1.10)$$

unde:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} \quad (15.1.11)$$

Din diagramele fazoriale prezentate în Fig. 15.2 se poate calcula mărimea unghiului φ , cu ajutorul funcției trigonometrice tangentă. **Într-un triunghi dreptunghic, tangenta unui unghi este egală cu raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unghiului.** În triunghiul din fig. 15.2a se poate scrie:

$$\tan \varphi = \frac{(U_L - U_C)}{U_R} = \frac{(IX_L - IX_C)}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R} \quad (15.1.12)$$

În cuvinte se poate spune că **într-un circuit serie R-L-C, tangenta unghiului de defazaj dintre tensiunea aplicată circuitului și curentul din circuit este egală cu raportul dintre reactanta netă a circuitului și rezistența din circuit.**

15.2 Puterea într-un circuit serie R-L-C, alimentat la tensiune alternativă

Ne referim la circuitul serie din Fig. 15.1. Puterea momentană consumată de circuit este dată de produsul dintre tensiune și curent, adică $p = ui$. Înlocuind în formula p a puterii momentane, tensiunea momentană u și curentul momentan i , se obține:

$$p = U_m \cdot \sin \omega t \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (15.2.1)$$

Matematica ne vine în ajutor și ne arată că:

$$\sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - (\cos 2\omega t - \varphi)] \quad (15.2.2)$$

Ecuatia puterii p , din (15.2.1) devine:

$$p = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - (\cos 2\omega t - \varphi)] = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\cos \varphi - (\cos 2\omega t - \varphi)] \quad (15.2.3)$$

Tinând cont de definiția valorii efective a tensiunii și curentului, rezultă:

$$p = U \cdot I [\cos \varphi - (\cos 2\omega t - \varphi)] = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) \quad (15.2.4)$$

Constatăm că puterea momentană are două componente:

- O componentă constantă în timp, pe care o notăm cu P , $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ și care este de fapt **puterea reală** consumată în circuit; ea este reprezentată printr-o linie orizontală în Fig.15.4;
- O componentă pulsatorie $-U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$, care are frecvența dublă decât tensiunea sau curentul prin circuit și care oscilează în jurul liniei orizontale din Fig. 15.4. Această componentă nu contribuie la puterea consumată de circuit, valoarea medie a sa pe durata unei perioade este zero, așa cum se va arăta mai jos.

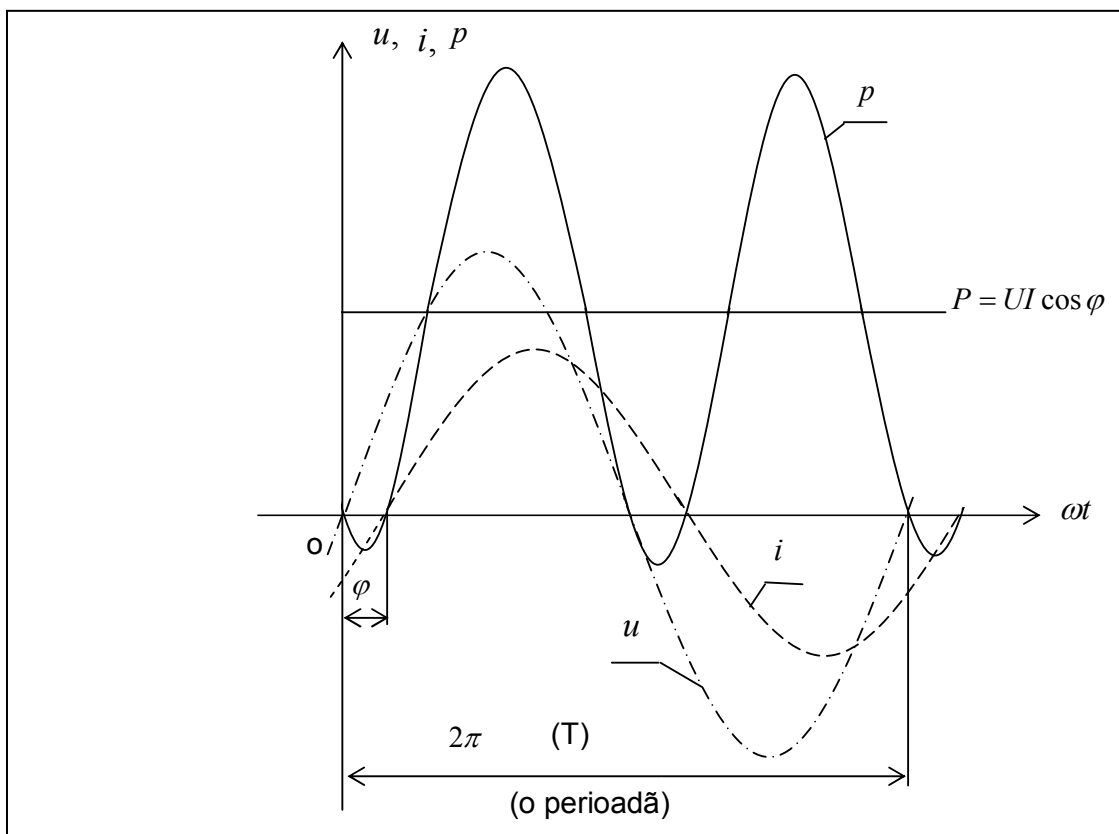


Fig. 15.4 Curba puterii momentane într-un circuit serie R-L-C

Din Fig. 15.4 se vede că în majoritatea timpului dintr-o perioadă, puterea momentană este pozitivă, și numai în două intervale foarte scurte puterea momentană este negativă. Din Fig. 15.2 b și c se vede că circuitul analizat are o reactanță netă inductivă. Din acest motiv circuitul analizat este echivalent cu un alt circuit serie format din rezistența R și o reactanță inductivă $X = X_L - X_C$. Aceste lucruri fiind precizate, putem spune că în momentele în care puterea momentană este pozitivă, puterea circulă de la sursă la consumator, unde este disipată de rezistența R . În momentele în care puterea este negativă, ea circulă de la sarcină la sursă, mai exact, din câmpul magnetic al bobinei rezultante (care are inductanța X) către sursă.

Cele două componente ale puterii momentane p consumată de un circuit serie R-L-C sunt arătate separat în Fig. 15.5. Acestea sunt $-U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$ și $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$. Dacă se adună cele două curbe, se obține curba puterii momentane p , arătată în Fig. 15.4. Se observă că media pe durata unei perioade T a componentei $-U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$ este zero. Într-adevăr, această componentă are două alternanțe pozitive și două negative. O alternanță negativă se observă imediat, iar cea de a doua se obține din partea de sinusoidă cuprinsă între punctele O-B-G și "restul" de sinusoidă cuprinsă între punctele E-F-H, ale căror suprafețe sunt notate cu câte un semn minus. Cele două "părți" de sinusoidă echivalează cu o alternanță negativă completă, demonstrându-se grafic că, componenta pulsatorie $-U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$ a puterii momentane are valoarea medie pe o perioadă egală cu zero.

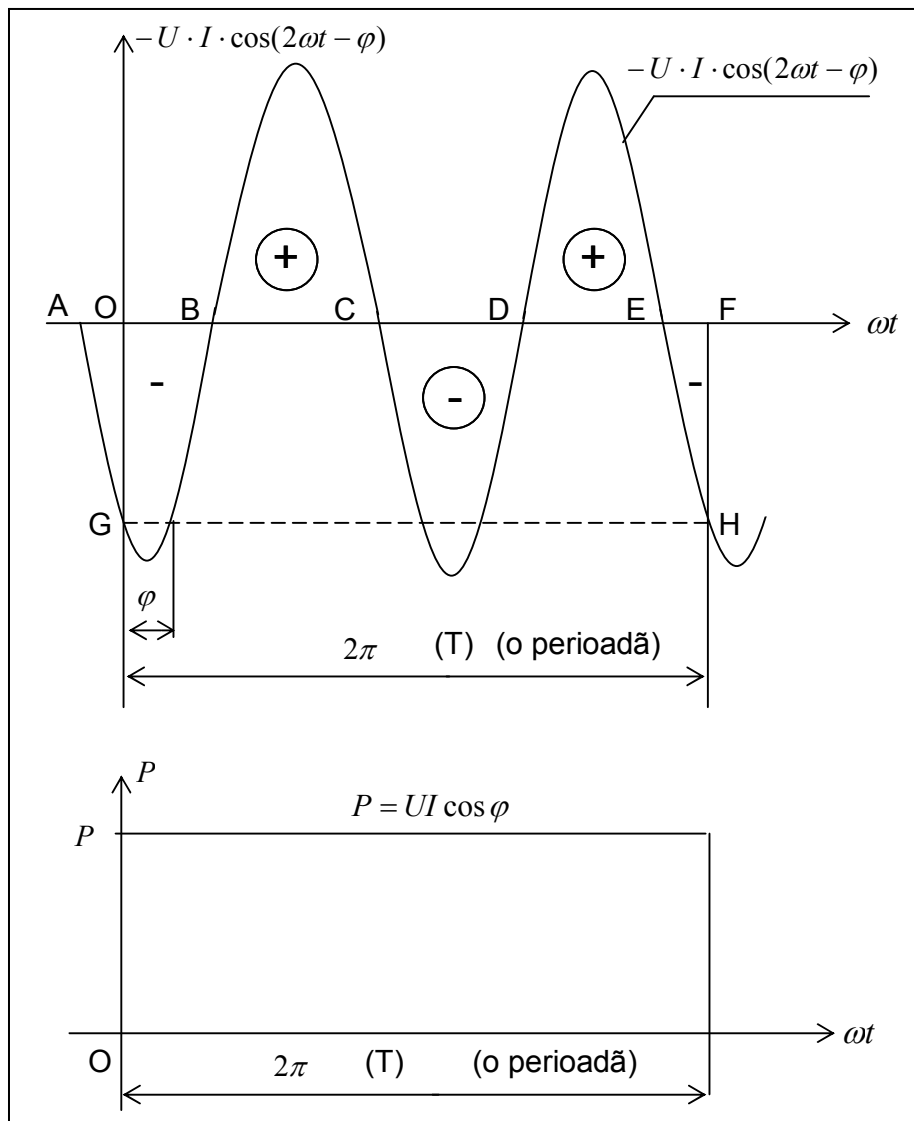


Fig. 15.5 Cele două componente ale puterii momentane p într-un circuit serie R-L-C, alimentat la tensiune alternativă

Cealaltă componentă a puterii momentane, $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$, este constantă în timp și media ei pe durata unei perioade este egală cu ea însăși. Rezultă că:

Puterea medie pe o perioadă, numită și puterea activă consumată de un circuit serie R-L-C, alimentat la tensiune alternativă, este dată de relația:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (15.2.5)$$

unde:

P = puterea activă consumată în circuit, măsurată în watt, [W];

U = valoarea efectivă a tensiunii generatorului, [V];

I = valoarea efectivă a curentului prin circuitul serie, [A];

φ = unghiul de defazaj dintre tensiunea aplicată circuitului și curentul prin circuit, [rad] sau [grade].

În relația (15.2.5) se vede că puterea medie pe o perioadă este dată de produsul a trei factori, U , I și $\cos \varphi$. Al treilea factor, $\cos \varphi$, se numește **factorul de putere al circuitului**.

Trebuie menționat faptul că puterea activă consumată într-un astfel de circuit este consumată numai de rezistență, condensatorul și bobina nu consumă putere activă. Acest lucru rezultă ușor dacă se exprimă factorul de putere, $\cos \varphi$, în funcție de parametrii circuitului. În triunghiul impedanțelor din Fig. 15.2c cosinusul unghiului φ este egal cu raportul dintre cateta alăturată unghiului φ și ipotenuză, adică:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (15.2.6)$$

Înlocuind relația (15.2.6) pentru $\cos \varphi$ în relația puterii active, rezultă:

$$P = UI \cos \varphi = UI \cdot \frac{R}{Z} = \frac{U}{Z} \cdot I \cdot R = I \cdot I \cdot R = I^2 R \quad (15.2.7)$$

S-a regăsit relația puterii active consumată într-un circuit cu rezistență pură, alimentat cu tensiune alternativă.

Relația (15.2.5) a puterii active este valabilă pentru toate cazurile analizate: pentru circuitul rezistiv, prezentat Fig. 12.1a, pentru circuitul inductiv, prezentat în Fig. 13.1a și pentru circuitul capacitiv, prezentat în Fig. 14.1a.

Pentru circuitul rezistiv, tensiunea și curentul sunt în fază, deci unghiul de defazaj este zero, $\varphi = 0$ și $\cos 0 = 1$. Rezultă $P = UI \cdot \cos 0 = UI \cdot 1 = UI$.

Pentru circuitul inductiv, unghiul de defazaj dintre tensiune si curent este $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ si $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Rezultă $P = UI \cdot \cos(-90^0) = UI \cdot 0 = 0$.

Pentru circuitul capacitiv, unghiul de defazaj dintre tensiune si curent este $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ si $\cos(+\frac{\pi}{2}) = 0$. Rezultă $P = UI \cdot \cos 90^0 = UI \cdot 0 = 0$.

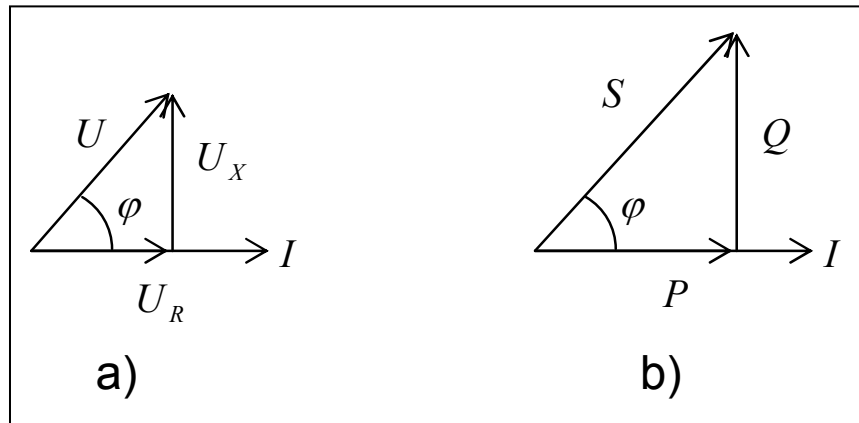


Fig.15.6. Triunghiul tensiunilor si triunghiul puterilor

În Fig.15.6a se arată triunghiul tensiunilor si anume, tensiunea aplicată circuitului U , căderea de tensiune U_R de pe rezistenta din circuit si căderea de tensiune U_X de pe reactanta netă din circuit. Dacă cele trei tensiuni mentionate se înmultesc cu curentul prin circuit se obtin puterile din circuit, si anume:

$$S = UI; \quad P = U_R I = RI^2; \quad Q = U_X I = XI^2 \quad (15.2.8)$$

unde:

S = este numită puterea aparentă disponibilă la bornele circuitului, măsurată în volt-ampere, [VA];

P = este numită puterea activă consumată de circuit, măsurată în watt, [W];

Q = este numită puterea reactivă consumată de circuit, măsurată în volt-ampere-reactiv, [VAR].

Dacă în triunghiul puterilor se calculează sinusul unghiului φ se obtine:

$$\sin \varphi = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{UI} \quad Q = UI \sin \varphi \quad (15.2.9)$$

Puterea reactivă nu are un înteles fizic, ea este definită pe baza relatiei $Q = UI \sin \varphi$. Puterea reactivă este folosită de circuit doar pentru crearea

câmpurilor electrice între armăturile condensatorilor și a câmpurilor magnetice din bobine. În aplicațiile din energetică, puterea reactivă produce magnetizarea circuitelor magnetice ale echipamentelor, care sunt în principal transformatoarele electrice și motoarele electrice asincrone. Fără câmpul magnetic învârtitor, un motor electric asincron nu ar putea funcționa.

În ecuația (15.2.10) sunt prezentate majoritatea definițiilor puterii reactive:

$$Q = U_x I = UI \sin \Phi = XI^2 = (X_L - X_C)I^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)I^2 \quad (15.2.10)$$

Plecând de la expresiile puterii reactive, prezentate în relația (15.2.10), se obține o altă expresie a puterii reactive, evident după mai multe manipulări matematice:

$$Q = 2\omega\left(\frac{LI^2}{2} - \frac{I^2}{2C\omega^2}\right) = 2\omega(W_m - W_e) \quad (15.2.11)$$

unde:

W_m = energia magnetică medie înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei, măsurată în watt-secundă, [Ws];

W_e = energia electrică medie înmagazinată în câmpul electric al condensatorului, măsurată în watt-secundă, [Ws].

Pe baza expresiei (15.2.11) se poate spune că:

Puterea reactivă Q este proporțională, la o frecvență dată, cu diferența dintre valorile medii ale energiilor magnetice și electrice înmagazinate în câmpul magnetic al bobinei și câmpul electric al condensatorului.

Din triunghiul puterilor se observă următoarea relație de legătură între puterile menționate:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (15.2.12)$$

15.3 Rezonanța de tensiune într-un circuit serie R-L-C

Dacă într-un circuit serie R-L-C reactanța inductivă este egală cu reactanța capacitară, impedanța circuitului va fi egală doar cu rezistența circuitului.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \text{ dar } X_L = X_C, \text{ rezultă: } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_L)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Deși în circuit sunt conectate toate elementele: rezistorul, bobina și condensatorul, totuși circuitul se comportă ca și cum ar fi conectat numai rezistorul. Valoarea curentului prin circuit va fi maximă și va fi limitată doar de rezistența din circuit și se notează cu I_0 :

$$I_0 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}$$

Căderile de tensiune pe bobină și pe condensator sunt egale dar opuse, astfel încât tensiunea pe grupul format din bobină înseriată cu condensatorul va fi zero. În schimb, tensiunile pe condensator și pe bobină pot fi mai mari decât tensiunea de alimentare. Acest fenomen se numește **rezonanță de tensiune**, sau **rezonanță serie**.

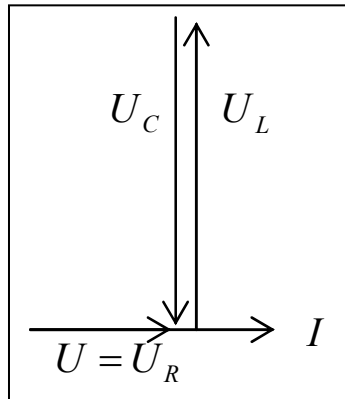


Fig. 15.7 Diagrama fazorială a unui circuit R-L-C aflat la rezonanță

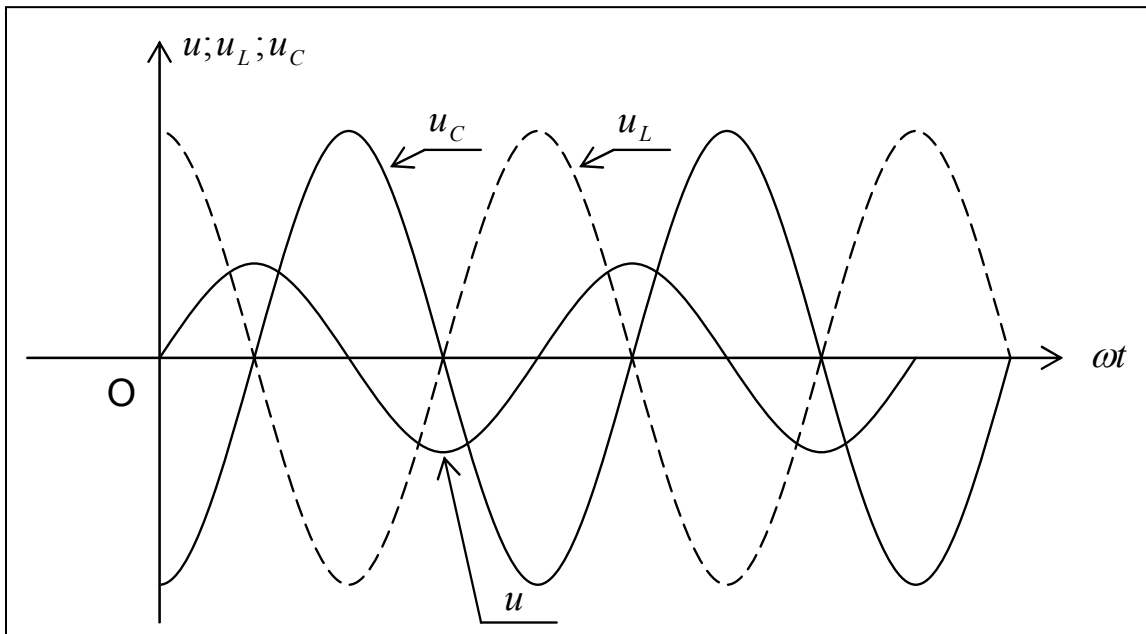


Fig. 15.8 Diagrama tensiunilor în funcție de timp pentru un circuit serie R-L-C aflat la rezonanță

Din figurile 15.7 si 15.8 se vede că în orice moment suma tensiunilor de pe bobină si de pe condensator este zero, în timp ce fiecare în parte este mai mare decât tensiunea aplicată circuitului.

Frecventa la care are loc rezonanta este numită frecvență de rezonanță si se notează cu f_0 . Valoarea ei poate fi găsită din conditia de rezonanță, $X_L - X_C = 0$, sau $X_L = X_C$. Se poate scrie:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}; \quad \omega_0^2 LC = 1; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad (15.3.1)$$

$$(2\pi f_0)^2 = \frac{1}{LC}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (15.3.2)$$

Dacă L este măsurat în henry si C în farad, atunci f_0 este măsurat în hertz.

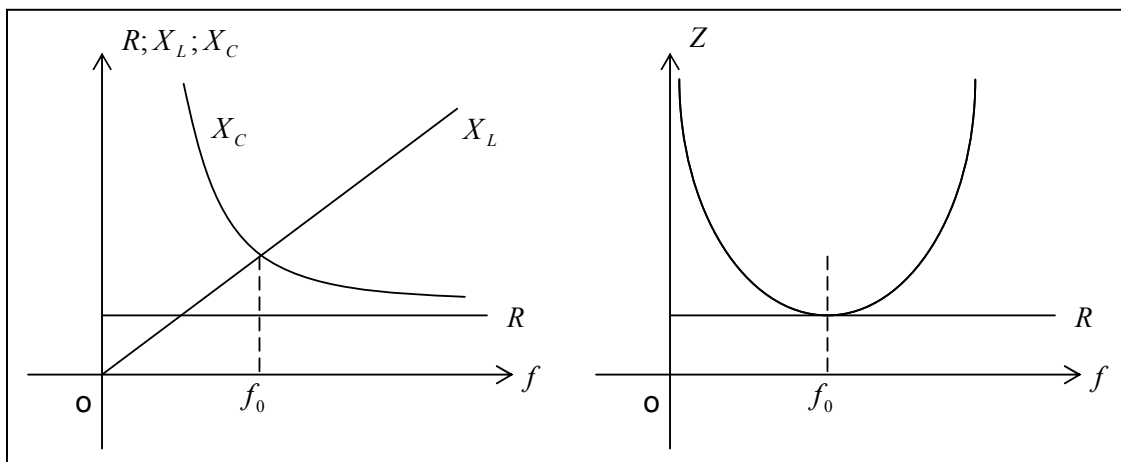


Fig. 15.9 Variatia parametrilor unui circuit serie R-L-C în functie de frecventa generatorului

În Fig. 15.9 se arată cum variază parametrii circuitului, R , X_L , X_C si Z , în functie de frecventa tensiunii aplicată circuitului. Pentru $f = f_0$ impedanta devine egală cu rezistenta din circuit si astfel curentul devine maxim si în fază cu tensiunea aplicată.

Pentru atingerea rezonantei serie pot exisata două cazuri:

- Generatorul are frecventa variabilă si prin modificarea frecventei generatorului se atinge frecventa de rezonanță;
- Generatorul are o frecvență fixă, dar fie inductanta, fie capacitatea, fie ambele sunt variabile si prin modificarea lor se atinge frecventa de rezonanță.

Notăm reactanta la rezonanță cu X_0 . Se poate scrie:

$$X_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15.3.3)$$

Raportul dintre reactanta la rezonanță X_0 și rezistența R se numește **factor de calitate al circuitului**:

$$Q = \frac{X_0}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15.3.4)$$

Din expresia factorului de calitate se vede că **pentru a obține un factor de calitate ridicat circuitul trebuie realizat cu o rezistență cât mai mică și cu un raport L/C cât mai mare**.

Inversul factorului de calitate se numește **factor de amortizare**:

$$a = \frac{1}{Q} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (15.3.5)$$

Dacă atât numărătorul cât și numitorul din expresia factorului de calitate se amplifică cu valoarea I_0 a curentului de la rezonanță, se va obține că factorul de calitate este egal cu raportul dintre tensiunea de la bornele bobinei sau condensatorului și tensiunea aplicată circuitului, în regim de rezonanță:

$$Q = \frac{X_0 I_0}{R I_0} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} \quad (15.3.6)$$

15.4 Oscilații amortizate și neamortizate într-un circuit serie R-L-C

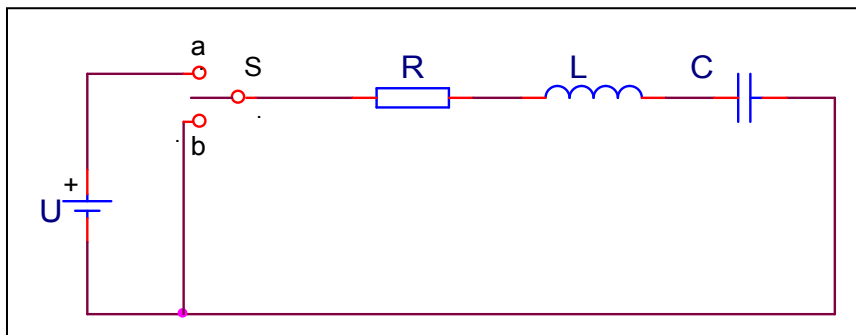


Fig. 15.10. Circuit R-L-C alimentat la tensiune continuă

Se consideră circuitul serie R-L-C din Fig. 15.10 alimentat la o tensiune continuă U . În rezistența R se consideră inclusă și rezistența internă a sursei. La punerea

comutatorului S pe pozitia **a**, condensatorul se va încărca, iar apoi la comutarea pe pozitia **b**, condensatorul se va descărca. Încărcarea sau descărcarea condensatorului se face fie aperiodic, fie periodic (oscilatoriu), în funcție de mărimea parametrilor din circuit. Astfel, dacă

$$R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15.4.1)$$

încărcarea și descărcarea condensatorului se face aperiodic, așa cum se arată în Fig. 15.11.

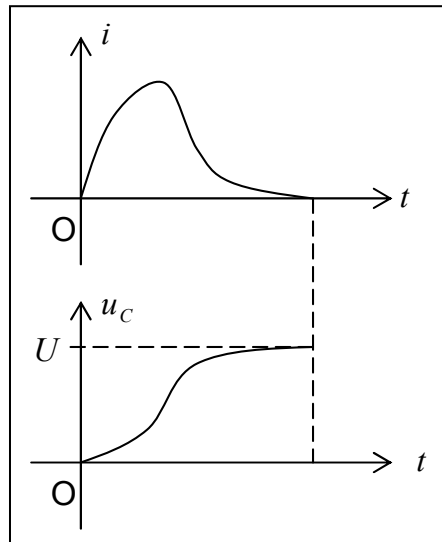


Fig. 15.11. Încărcarea aperiodică a condensatorului dintr-un circuit serie R-L-C

Dacă

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15.4.2)$$

atunci încărcarea sau descărcarea condensatorului se face periodic (oscilatoriu), ca în Fig. 15.12, oscilațiile din circuit sunt numite **oscilații proprii**.

Pulsatia oscilațiilor proprii ale circuitului, respectiv frecvența, sunt date de relațiile:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (15.4.3)$$

În cazul circuitelor slab amortizate, respectiv dacă

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \left(\frac{1}{LC}\right) \quad (15.4.4)$$

atunci pulsatia oscilatiilor proprii devine egală cu pulsatia de rezonanță:

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (15.4.5)$$

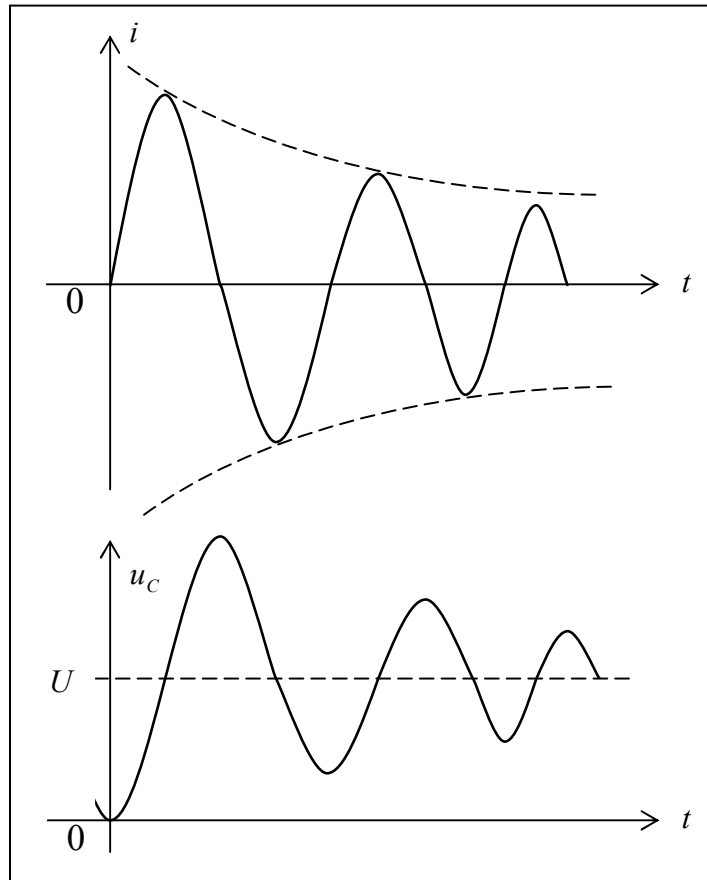


Fig. 15.12 Încărcarea periodică a condensatorului într-un circuit serie R-L-C

Exemplu numeric pentru paragraful 15:

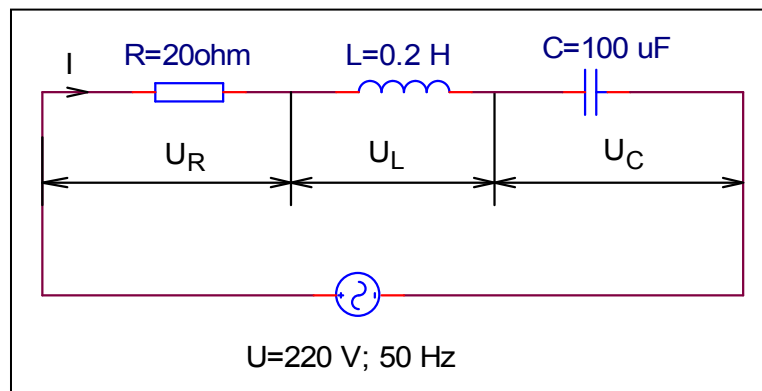


Fig. 15.13 Circuit serie R-L-C, pentru exemplul numeric

Un circuit serie R-L-C, ca cel din Fig. 15.13, are următorii parametrii: $R = 20\Omega$, $L = 0.2H$, $C = 100\mu F$. Circuitul este conectat la o tensiune cu valoarea efectivă 220 V și frecvența 50 Hz. Să se afle: a) impedanța circuitului; b) curentul din circuit; c) căderile de tensiune de pe rezistență, bobină și condensator; d) factorul de putere și unghiul de defazaj dintre tensiunea aplicată circuitului și curentul din circuit; e) puterea activă, reactivă și aparentă consumate de circuit; f) care trebuie să fie capacitatea condensatorului din circuit, astfel încât circuitul să fie la rezonanță, sau altfel spus, încât factorul de putere al circuitului să devină unitar; g) păstrând parametrii circuitului, care trebuie să fie frecvența generatorului astfel încât circuitul să fie la rezonanță.

Soluție:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \times 50 \times 0.2 = 62.83 \approx 63 \text{ } [\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 100 \times 10^{-6}} = 31.8 \approx 32 \text{ } [\Omega]$$

$X = X_L - X_C = 63 - 32 = 31 \text{ } [\Omega]$. Reactanța netă a circuitului este inductivă, pentru că $X_L > X_C$. Este ca și cum rezistorul ar fi în serie numai cu o inductanță.

a) $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{20^2 + 31^2} = 36.89 \approx 37 \text{ } [\Omega]$

b) $I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{37} = 5.94 \approx 6 \text{ } [A]$

c) $U_R = IR = 6 \times 20 = 120 \text{ } [V]$

$$U_L = IX_L = 6 \times 63 = 378 \text{ } [V]$$

$$U_C = IX_C = 6 \times 32 = 192 \text{ } [V]$$

$$U_X = IX = 6 \times 31 = 186 \text{ } [V]$$

Se vede că tensiunea pe inductanță este mai mare decât tensiunea de alimentare a circuitului.

d)

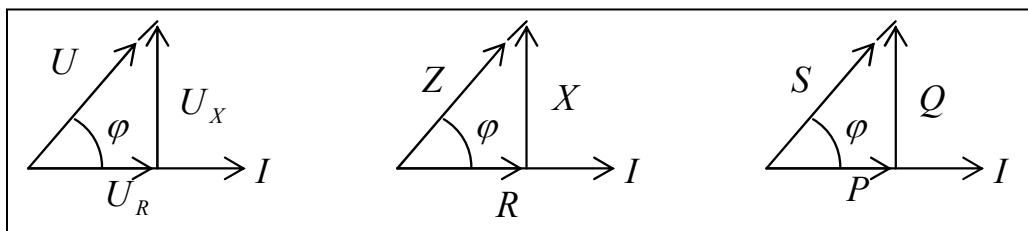


Fig. 15.14 Triunghiurile tensiunilor, impedanțelor și al puterilor; au fost alese scări de desenare diferite pentru tensiuni, impedanțe, puteri și curent

Pentru aflarea unghiului de defazaj dintre tensiune și curent se calculează tangenta unghiului φ . Avem:

$$\tan \varphi = \frac{U_X}{U_R} = \frac{186}{120} = 1.55$$

Unghiul φ se află cu ajutorul unui calculator de buzunar mai performant, prin funcția inversă tangentei, care este denumită arctangentă, sau \tan^{-1} :

$\varphi = \tan^{-1}(1.55) = 57.17^{\circ}$, adică unghiul (arcu) care are tangenta egală cu 1.55 are 57.17 grade.

Acest lucru înseamnă că, curentul din circuit rămâne în urma tensiunii aplicate cu unghiul $\varphi = 57.17^{\circ}$.

Tot cu calculatorul de buzunar se calculează apoi $\cos \varphi$ și $\sin \varphi$:

$$\cos \varphi = \cos 57.17^{\circ} = 0.5421;$$

$$\sin \varphi = \sin 57.17^{\circ} = 0.84$$

e) $S = UI = 220 \times 6 = 1320$ [VA];
 $P = UI \cos \Phi = 220 \times 6 \times 0.54 = 713$ [W]
 $Q = UI \sin \Phi = 220 \times 6 \times 0.84 = 1108.8 \approx 1109$ [VAR]

f) Ca să se crească factorul de putere de la 0.5421 la 1, condensatorul actual trebuie înlocuit cu alt condensator care să aibă reactanța capacitivă $X_{C1} = X_L = 63\Omega$;

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = 63 [\Omega]; C_1 = \frac{1}{\omega \times 63} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 63} = 50.525 \approx 50 [\mu F]$$

Rezultă că, capacitatea condensatorului din circuit trebuie să fie $50 \mu F$. În această situație impedanța circuitului devine $Z = R = 20\Omega$. Curentul din circuit devine $I_0 = 220/20 = 11A$. Tensiunile de pe bobină și condensator vor deveni egale:

$$U_L = U_C = I_0 X_L = I_0 X_C = 11 \cdot 63 = 693V$$

Se observă că la rezonanță tensiunile de pe bobină și de pe condensator sunt de 3.15 ori mai mari decât tensiunea de alimentare a circuitului.

g) $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.2 \times 100 \times 10^{-6}}} = 35.58Hz$

Rezultă că păstrând parametrii din circuit, rezonanța poate fi atinsă prin scăderea frecvenței tensiunii sursei de la 50 Hz la 35.58 Hz.

16. Circuit paralel R-L-C în alternativ

16.1 Circuit electric format dintr-o rezistență, o inductanță și o capacitate conectate în paralel, alimentat în alternativ

În Fig. 16.1.1 se consideră un circuit paralel format dintr-o rezistență, o bobină fără pierderi (adică fără rezistență) și un condensator care are numai capacitate pură, alimentat de la o sursă de tensiune alternativă, cu valoarea efectivă a tensiunii U . Pentru determinarea impedanței acestui circuit paralel trebuie să se facă diagrama fazorială a curentilor din circuit. Pentru că tensiunea U este aplicată în paralel pe toate elementele de circuit, fazorul tensiunii U va fi luat ca

referință și va fi desenat orizontal. Apoi se desenează ceilalți fazori și se calculează curenții prin fiecare ramură:

$$I_R = \frac{U}{R}; \quad I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{2\pi f L}; \quad I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = U\omega C = 2\pi f UC \quad (16.1.1)$$

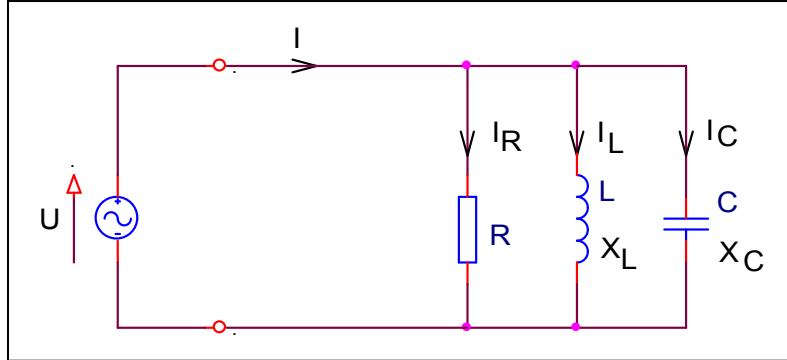


Fig. 16.1 Circuit paralel R-L-C alimentat la tensiune alternativă

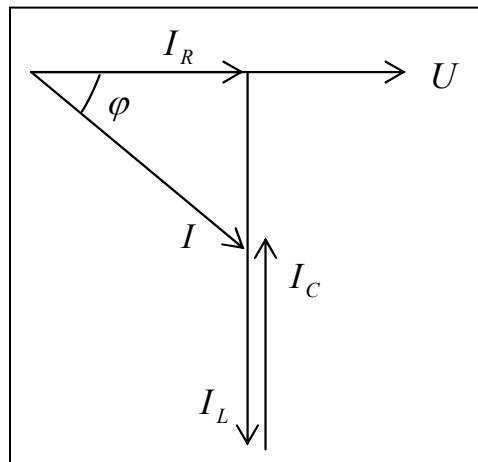


Fig.16.2 Diagrama fazorială a curenților din circuitul paralel R-L-C

În triunghiul curenților se aplică teorema lui Pitagora și se obține:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2; \quad I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \quad (16.1.2)$$

Făcând raportul dintre U și I se obține impedanța circuitului paralel R-L-C:

$$Z = \frac{U}{I} \quad (16.1.3)$$

Unghiul de defazaj φ , dintre tensiunea aplicată și curentul total de pe linia ce duce spre cele trei elemente în paralel, se obține prin calcularea tangentei de φ ,

ca raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată, și apoi se înlocuiesc curenții cu expresiile din (16.1.1). Se obține:

$$\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} \quad \varphi = \tan^{-1} \left[\frac{I_L - I_C}{I_R} \right] \quad (16.1.4)$$

Cu valoarea unghiului φ se calculează factorul de putere al circuitului $\cos \varphi$.

Exemplu numeric 16.1: Un circuit paralel R-L-C, ca cel din fig.16.1 are următorii parametrii: $R=60 \text{ ohm}$, $L=0.1 \text{ H}$, $C=25\mu\text{F}$, $U=240 \text{ V}$, 50 Hz . Să se calculeze: a) curentul total furnizat de sursă; b) impedanța circuitului; c) unghiul de defazaj dintre tensiunea aplicată circuitului și curentul total din circuit.

Soluție:

a) $C = 25 \mu\text{F} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ F}$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 0.1 \cong 31.416 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} \cong 127.324 \Omega$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{240}{60} = 4 \text{ A}; \quad I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{240}{31.416} \cong 7.64 \text{ A}; \quad I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{240}{127.324} \cong 1.885 \text{ A}$$

Din cauza prezentei numărului $\pi = 3.141592\dots$, care are un număr mare (infinit) de zecimale, mărimile calculate au fost aproximare la valorile de mai sus.

Diagrama fazorială este cea din Fig.16.2. Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului curenților obținem:

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 = 4^2 + (7.64 - 1.885)^2 = 16 + 33.12 = 49.12$$

$$I = \sqrt{49.12} = 7.008 \text{ A} \cong 7 \text{ A}$$

b) Impedanța circuitului rezultă ușor:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{240}{7} \cong 32.486 \Omega$$

Pentru că numărul 240 nu se împarte exact la 7 rezultatul calculului impedanței a fost aproximat la 32.486.

c) $\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{7.64 - 1.885}{4} \cong 1.43875$; $\varphi = \tan^{-1} 1.43875 \cong 55.20^\circ$

$$\cos \varphi = \cos 55.20^\circ \cong 0.57$$

16.2 Puterea într-un circuit paralel R-L-C, alimentat la tensiune alternativă

Privind circuitul din Fig. 16.1 observăm că cele trei elemente, considerate pure, sunt alimentate la aceeași tensiune U . Deoarece inductanța și capacitatea nu consumă putere activă, rezultă că aceasta este consumată doar de rezistență. Puterea consumată de rezistență este dată de relația

$$P = RI_R^2 = R \left(\frac{U}{R} \right)^2 = \frac{U^2}{R} = UI_R \quad (16.2.1)$$

În triunghiul curenților din Fig. 16.2 se calculează cosinus de φ ca fiind raportul dintre cateta alăturată unghiului φ și ipotenuză:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I}; \quad I_R = I \cos \varphi \quad (16.2.2)$$

Înlocuind valoarea lui I_R în (16.2.1) se obține formula puterii active într-un circuit paralel R-L-C:

$$P = RI_R^2 = \frac{U^2}{R} = UI_R = UI \cos \varphi \quad (16.2.3)$$

Rezultă că și în acest caz este valabilă formula $P = UI \cos \varphi$.

Exemplu numeric 16.2: Să se afle puterea consumată în circuitul prezentat la exemplul numeric 16.1.

Soluție:

Se poate folosi oricare dintre relațiile:

$$P = RI_R^2 \quad P = \frac{U^2}{R} \quad P = UI_R \quad P = UI \cos \varphi$$

$$P = 60 \cdot 4^2 = 960W; \quad P = \frac{240^2}{60} = 960W; \quad P = 240 \cdot 4 = 960W;$$

$$P = 240 \cdot 7 \cdot 0.57 = 957.6 \cong 960W$$

Rezultatul ultimului calcul nu este exact 960 din cauza aproximărilor repetate făcute la calcularea curenților prin cele trei ramuri și a curenților total, cât și la calcularea tangentei și a cosinusului de φ .

16.3 Rezonanța de curent într-un circuit paralel R-L-C

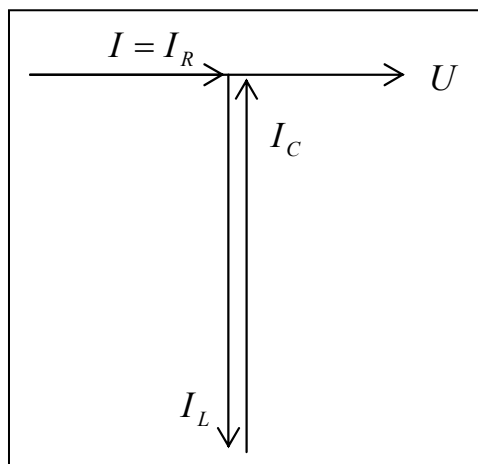


Fig. 16.3. Diagrama fazorială a unui circuit paralel R-L-C la rezonanță

Si în acest caz se presupune că avem o bobină pură (fără rezistentă) și un condensator fără pierderi. Dacă în circuitul din Fig.16.1 reactanță inductivă a bobinei este egală cu reactanta capacitivă a condensatorului, curentul total care absorbit de la sursă va fi minim și egal cu curentul care circulă prin rezistență, iar despre circuit se spune că este la rezonanță. În cazul rezonanței, curentul prin bobină va fi egal și opus cu curentul prin condensator, astfel încât suma lor este zero în orice moment, curentul total fiind minim, adică impedanța circuitului este maximă. Mai mult, curenții prin bobină și condensator vor fi mult mai mari decât curentul total. Din acest motiv această rezonanță se numește **rezonanță paralel** sau **rezonanță de curent**.

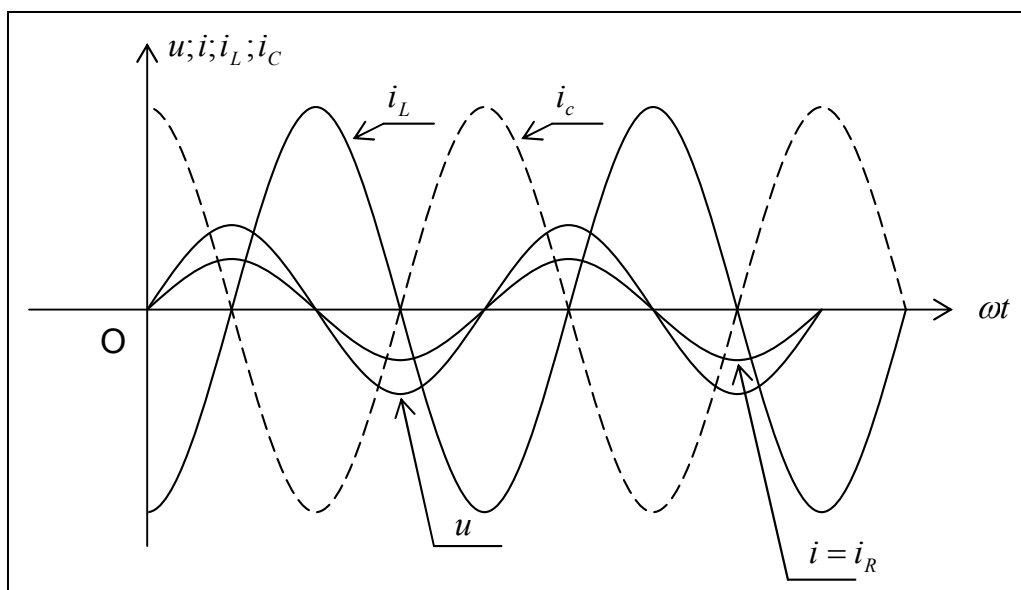


Fig. 16.4 Diagrama în funcție de timp a tensiunii aplicate și a curenților din circuitul paralel R-L-C

Exemplu numeric 16.3:

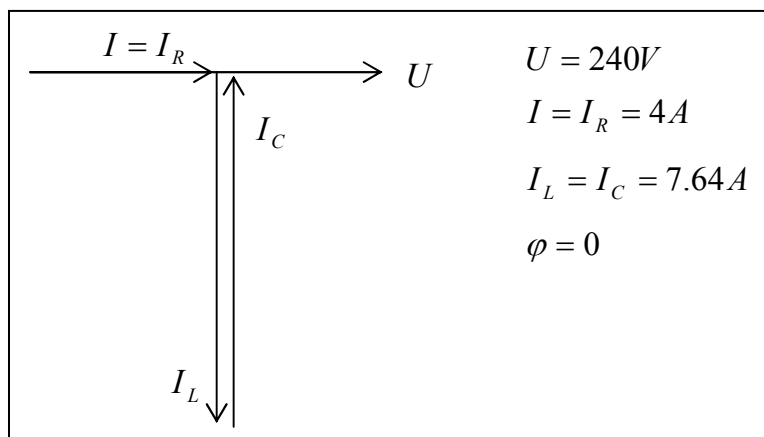


Fig. 16.5 Diagrama fazorială a curenților din exemplul numeric 16.3

Un circuit paralel R-L-C, ca cel din fig.16.1 are următorii parametrii: $R=60 \text{ ohm}$, $L=0.1 \text{ H}$, $C=25\mu\text{F}$, $U=240 \text{ V}$, 50 Hz . Să se afle capacitatea condensatorului cu care trebuie înlocuit condensatorul actual pentru a aduce circuitul la rezonanță.

Soluție:

Se pune condiția $X_L = X_C = 31.416\Omega$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_L} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 31.416} = 1.013 \cdot 10^{-4} = 101.3 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 101.3 \mu\text{F}$$

Rezultă că pentru a aduce circuitul la rezonanță condensatorul de $25 \mu\text{F}$ trebuie înlocuit cu altul cu $C=101.3 \mu\text{F}$. Diagrama fazorială a curentilor din circuit este prezentată în Fig. 16.5.

Se observă că valoarea curentului total I este egală cu valoarea curentului prin rezistența R , iar curentii prin bobină și condensator sunt de 1.91 ori mai mari decât curentul prin rezistență.

16.4 Rezonanța de curent într-un circuit paralel format numai dintr-o bobină reală și un condensator real

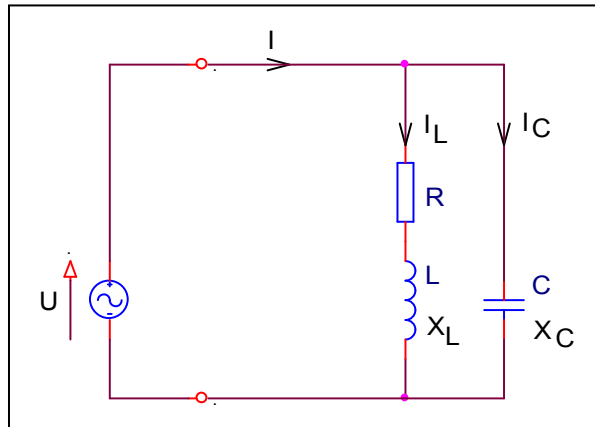


Fig. 16.6 Circuit paralel dintr-o bobină reală și un condensator real

De data aceasta am considerat o bobină reală, care are deci o rezistență R diferită de zero. În Fig. 16.6 bobina a fost reprezentată prin inductanța sa L în serie cu rezistența totală R a spirelor bobinei. Condensatorul este de asemenea un condensator real, pentru că rezistența de izolație dintre armături poate fi considerată infinit de mare și în concluzie curentul prin spațiul dintre armături este zero, adică condensatorul nu are pierderi. Diagrama fazorială a acestui circuit este redată în Fig. 16.7.

Din Fig. 16.7 se vede că curentul prin bobină I_L nu este defazat cu $\pi/2$ (90°) în urma tensiunii U aplicată bobinei. Unghiul de defazaj, notat cu φ_L este mai mic decât $\pi/2$ (90°), pentru că bobina este presupusă a fi reală, care are rezistența spirelor $R \neq 0$.

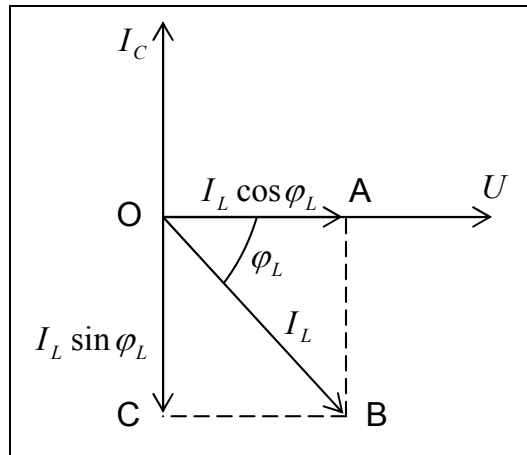


Fig. 16.7 Diagrama fazorială a elementelor care intervin într-un circuit paralel, format dintr-o bobină reală și un condensator real, alimentat la tensiune alternativă

Descompunem curentul prin bobină în două componente, una în fază cu tensiunea aplicată, egală cu segmentul \overline{OA} și alta defazată $\pi/2$ (90°) în urma tensiunii U aplicată bobinei, egală cu segmentul \overline{OC} . În triunghiul dreptunghic OAB se calculează sinusul și cosinusul unghiului φ_L :

$$\sin \varphi_L = \frac{\overline{AB}}{I_L}; \quad \overline{AB} = I_L \sin \varphi_L; \quad \overline{OC} = \overline{AB} = I_L \sin \varphi_L$$

Deci componenta curentului defazată cu $\pi/2$ (90°) în urma tensiunii U aplicată bobinei este $I_L \sin \varphi_L$.

$$\cos \varphi_L = \frac{\overline{OA}}{I_L}; \quad \overline{OA} = I_L \cos \varphi_L$$

Componenta curentului în fază cu tensiunea U este $I_L \cos \varphi_L$.

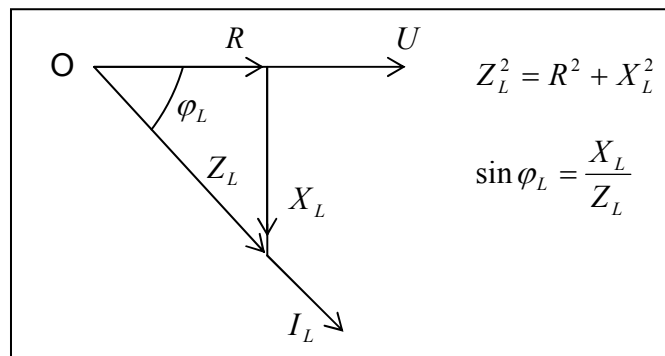


Fig. 16.8 Triunghiul impedanțelor pentru bobina reală care este în paralel cu condensatorul

La rezonanță curentul I_C prin condensator devine egal cu componenta $I_L \sin \varphi_L$ a curentului prin bobină: $I_C = I_L \sin \varphi_L$. Dar $I_C = \frac{U}{X_C}$ și $I_L = \frac{U}{Z_L}$, unde Z_L este impedanța bobinei, dată de relația: $Z_L^2 = R^2 + X_L^2$.

Triunghiul impedanțelor doar pentru bobină este reprezentat în Fig.16.8.

Din triunghiul impedanțelor din Fig. 16.8 rezultă: $\sin \varphi_L = \frac{X_L}{Z_L}$.

Reamintim condiția de rezonanță: $I_C = I_L \sin \varphi_L$. În această condiție se înlocuiește $I_C = \frac{U}{X_C}$, $I_L = \frac{U}{Z_L}$ și $\sin \varphi_L = \frac{X_L}{Z_L}$. Rezultă:

$$\frac{U}{X_C} = \frac{U}{Z_L} \times \frac{X_L}{Z_L} \quad \text{sau} \quad Z_L^2 = X_L \times X_C \quad X_L = \omega L \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$Z_L^2 = \omega L \times \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{C} \quad R^2 + X_L^2 = \frac{L}{C} \quad (16.4.1)$$

$$X_L^2 = \frac{L}{C} - R^2 \quad (2\pi f L)^2 = \frac{L}{C} - R^2 \quad f^2 = \frac{\frac{L}{C} - R^2}{(2\pi L)^2}$$

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{L}{C} - R^2} \quad (16.4.2)$$

S-a obținut astfel frecvența la rezonanță, dată de relația (16.4.2). Dacă R^2 este neglijabil în raport cu L/C , atunci relația (16.4.2) devine:

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (16.4.3)$$

Rezultă că dacă $R^2 \ll \frac{L}{C}$, frecvența de rezonanță devine egală cu a unui circuit serie, care are aceiași parametrii.

16.5 Curentul la rezonanță într-un circuit paralel format numai dintr-o bobină reală și un condensator real

Din Fig.16.7 se vede că la rezonanță curentul total care pleacă de la sursă spre cele două elemente de circuit în paralel este egal doar cu componenta curentului

prin bobină în fază cu tensiunea aplicata circuitului, adică curentul absorbit de la sursă este $I = I_L \cos \varphi_L$.

Dar $I_L = \frac{U}{Z_L}$ și $\cos \varphi_L = \frac{R}{Z_L}$. Rezultă:

$$I = I_L \cos \Phi_L = \frac{U}{Z_L} \times \frac{R}{Z_L} = \frac{UR}{Z_L^2} \quad \text{Înlocuind } Z_L^2 = \frac{L}{C} \text{ rezultă:}$$

$$I = \frac{UR}{\frac{L}{C}} = \frac{UR}{\frac{L}{CR}} \quad (16.5.1)$$

Numitorul $\frac{L}{CR}$ este cunoscut ca **rezistență dinamică** sau **impedanta la rezonanță** a circuitului analizat și se notează cu Z_0 sau cu R_{din} . Deci:

$$Z_0 = R_{dyn} = \frac{L}{CR} \quad (16.5.2)$$

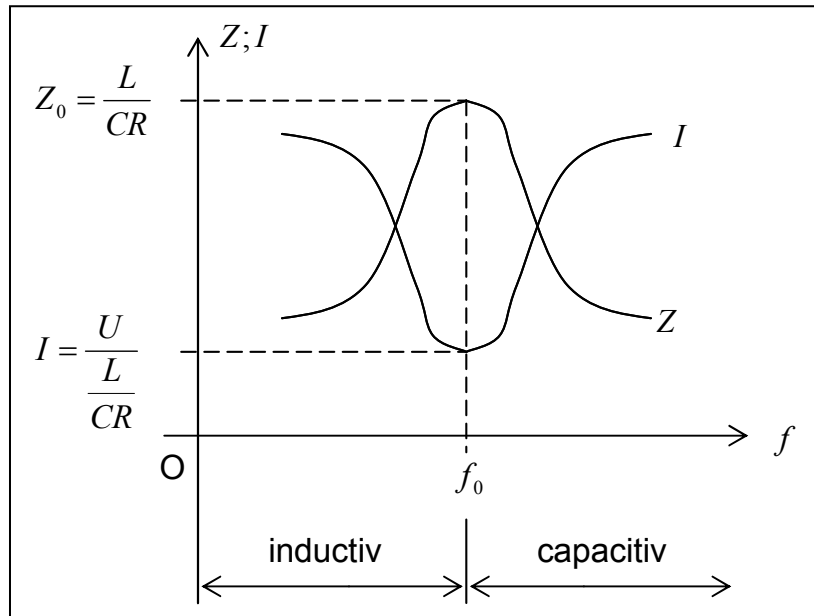


Fig. 16.9 Curba curentului absorbit de la sursă și a impedanței circuitului în funcție de frecvență, pentru un circuit paralel format dintr-o bobină reală și un condensator real

Trebuie menționat faptul că la rezonanță impedanța este doar rezistivă. Deoarece curentul total prin circuit este minim la rezonanță, înseamnă că

impedanta $Z_0 = \frac{L}{CR}$ este impedanta maximă a circuitului. Un astfel de circuit este des utilizat în antenele cu trapuri și este numit circuit rejector (filtru dop) pentru că el nu lasă să treacă (rejectează) semnalele care au frecvență egală cu frecvența de rezonanță a sa.

Această rezonanță este, deasemenea, o rezonanță de curent, pentru că curenții care circulă prin cele două ramuri în paralel este de mai multe ori mai mare decât curentul total absorbit de la sursă.

Rezonanța paralel are o mare importanță practică pentru că pe baza ei sunt construite circuitele acordate în radiotehnică.

Variația impedanței și a curentului din circuit în funcție de frecvența tensiunii de alimentare este arătată în Fig. 16.9. La rezonanță curentul total absorbit de la sursă este minim și impedanța circuitului este maximă. Tot la rezonanță, tensiunea aplicată circuitului este în fază cu curentul total absorbit de la sursă.

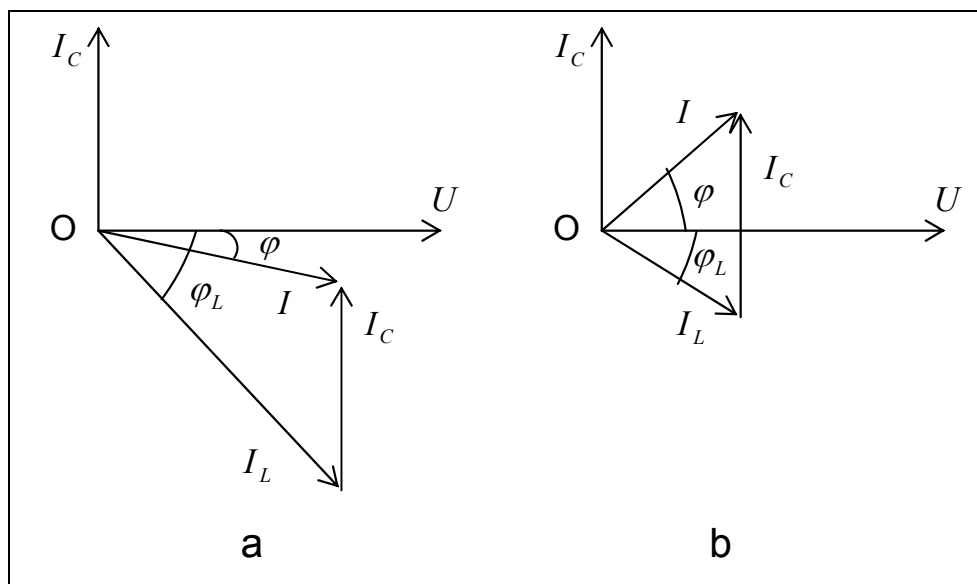


Fig. 16.10 Diagrama fazorială pentru curenții din circuit și tensiunea aplicată circuitului, în funcție de relația dintre f și f_0

Dacă $f < f_0$, reactanța inductivă a bobinei $X_L = 2\pi fL$ este mai mică decât reactanța capacitivă $X_C = 1/2\pi fC$. Curentul prin bobină va fi mai mare decât curentul prin condensator și curentul total absorbit de la sursă va fi în urma tensiunii aplicate, vezi Fig. 16.10a. Dacă $f > f_0$, reactanța inductivă a bobinei devine mai mare decât reactanța capacitivă a condensatorului și astfel curentul prin bobină va fi mai mic decât curentul prin condensator. Curentul total absorbit de la sursă va fi defazat înaintea tensiunii aplicate circuitului, vezi Fig. 16.10b. Din

acest motiv în Fig. 16.9 pentru $f < f_0$ s-a menționat că circuitul are caracter “inductiv”, iar pentru $f > f_0$ s-a menționat că circuitul are caracter “capacitiv”.

Exemplul numeric 16.4: Un condensator este conectat în paralel cu o bobină care are inductanța $L = 4mH$ și rezistența $R = 5\Omega$. Cele două elemente în paralel sunt alimentate de la o tensiune alternativă $U = 240V$ și $f = 50Hz$. Calculați capacitatea condensatorului pentru ca circuitul să fie la rezonanță.

Soluție:

La rezonanță există relația:

$$Z_L^2 = \frac{L}{C}, \text{ rezultă } C = \frac{L}{Z_L^2}; X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3.14 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1.2566\Omega;$$

$$Z_L^2 = R^2 + X_L^2 = 5^2 + 1.2566^2 = 26.58;$$

$$C = \frac{L}{Z_L^2} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{26.58} = 150.49 \cdot 10^{-6} F = 150.49 \mu F$$

Exemplul numeric 16.5:

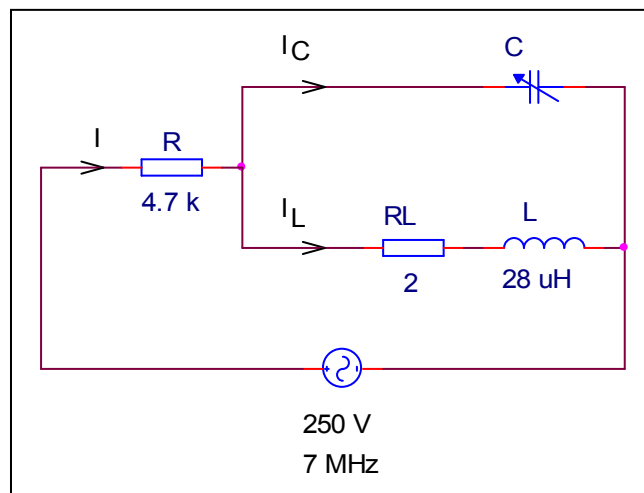


Fig. 16.11 Schema circuitului de la exemplul numeric 16.5

O bobină cu rezistența 2 ohm și inductanța 28 microhenry este conectată în paralel cu un condensator variabil. Cele două elemente în paralel sunt conectate în serie cu o rezistență de 4.7 kilohm. Tensiunea de alimentare este 250 V cu frecvența 7 MHz. Să se calculeze valoarea capacității condensatorului la rezonanță, curentul prin fiecare ramură și curentul total absorbit de la sursă.

Soluție: Configurația circuitului se vede în Fig. 16.11.

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \times 7 \times 10^6 \times 28 \times 10^{-6} = 1231.5\Omega$$

Deoarece rezistența bobinei de 2 ohm este neglijabilă în comparație cu reactanța sa, rezultă că frecvența la rezonanță se poate calcula cu formula:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad f_0^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 LC}; \quad C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L}$$

$$C = \frac{1}{(2\pi \times 7 \times 10^6)^2 \times 28 \times 10^{-6}} = 18.46 \times 10^{-12} F = 18.46 pF$$

Impedanta la rezonanță, sau rezistența dinamică este:

$$Z_0 = R_{dyn} = \frac{L}{CR} = \frac{28 \times 10^{-6}}{18.46 \times 10^{-12} \times 2} = 758396 \Omega$$

Rezistența totală din circuit la rezonanță devine:

$$R = 4700 + 758396 = 763096 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{250}{763096} = 3.276 \times 10^{-4} A = 0.3276 mA = 327 \mu A$$

Tensiunea pe grupul paralel este: $I \times R_{dyn} = 3.276 \times 10^{-4} \times 758396 = 248.46 V$

Curentul prin ramura inductivă este:

$$I_L = \frac{248.46}{\sqrt{2^2 + 1231.5^2}} = 0.201 A = 201 mA$$

Curentul prin ramura condensatorului este:

$$I_C = \frac{U_C}{\frac{1}{\omega C}} = \omega C U_C = 2\pi \times 7 \times 10^6 \times 18.46 \times 10^{-12} \times 250 = 202 mA$$

Practic, curenții prin cele două ramuri sunt egali. Diagrama fazorială este similară cu cea din Fig.16.7. Curenții prin ramuri sunt de 614 ori mai mari decât curentul absorbit de la sursă.

Comentariu asupra problemei rezolvate:

La rezonanță energia este transferată din câmpul electromagnetic al bobinei în câmpul electric al condensatorului și invers, suplimentarea energiei pentru învingerea pierderilor din circuit făcându-se prin curentul total absorbit de la sursă. La rezonanță curentul absorbit de la sursă este minim pentru că impedanța circuitului este maximă, dar curentul absorbit de la sursă este suficient ca să acopere pierderile din rezistența bobinei și a firelor de legătură. Cu cât pierderile din circuit vor fi mai mici, cu atât mai mic va fi curentul absorbit de la sursă.

În electronică și în special în radiotehnică unul dintre elementele în paralel este reglabil (ajustabil), de obicei condensatorul. Având condensatorul variabil, circuitele paralel L-C pot fi folosite în primele etaje ale radioreceptoarelor, pentru selectarea stației de radio dorite, așa cum se vede schematic în Fig. 16.12. Curentii prin cele două ramuri au valori maxime pentru frecvența de rezonanță a circuitului, iar tensiunea care apare pe grupul L-C este maximă la rezonanță. Frecvența de rezonanță a circuitului corespunde cu frecvența de emisie a stației recepționate.

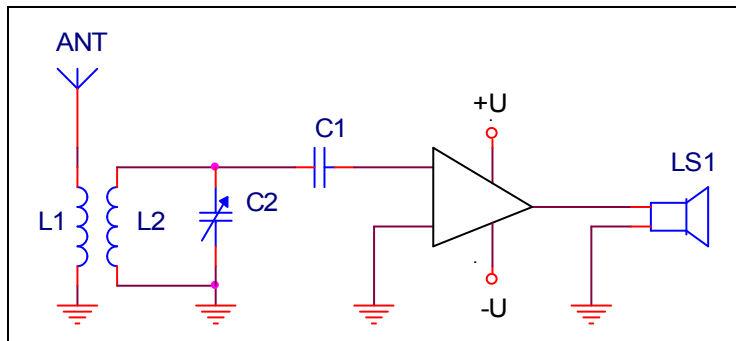


Fig. 16.12. Circuit de intrare utilizat la radioreceptoare

Circuitele paralel L-C mai sunt folosite și la construirea trapurilor pentru antenele multiband, cu scopul obținerii de impedanțe mari pentru anumite frecvențe.

17. Numere complexe

Utilizarea numerelor complexe în electroehnică sau electronică usurează calculul impedanțelor și a unghiurilor de fază ale circuitelor analizate. De aceea este important să le cunoaștem.

17.1 Axa numerelor reale

Numerele pe care le folosim aproape zilnic sunt numere reale, ca de exemplu 24, 89, 3.5, -50, -100, -25.2, etc. Încă din clasele elementare copiii învață la școală că aceste numere se pot așeza pe o linie orizontală, numită "axa numerelor reale", vezi Fig. 17.1. De la 0 (zero) spre dreapta, se reprezintă numerele pozitive și de la 0 (zero) spre stânga, se reprezintă numerele negative.

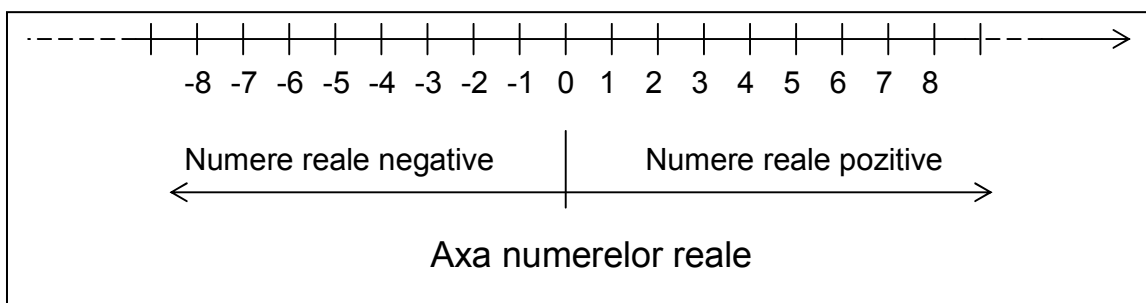


Fig. 17.1 Axa numerelor reale

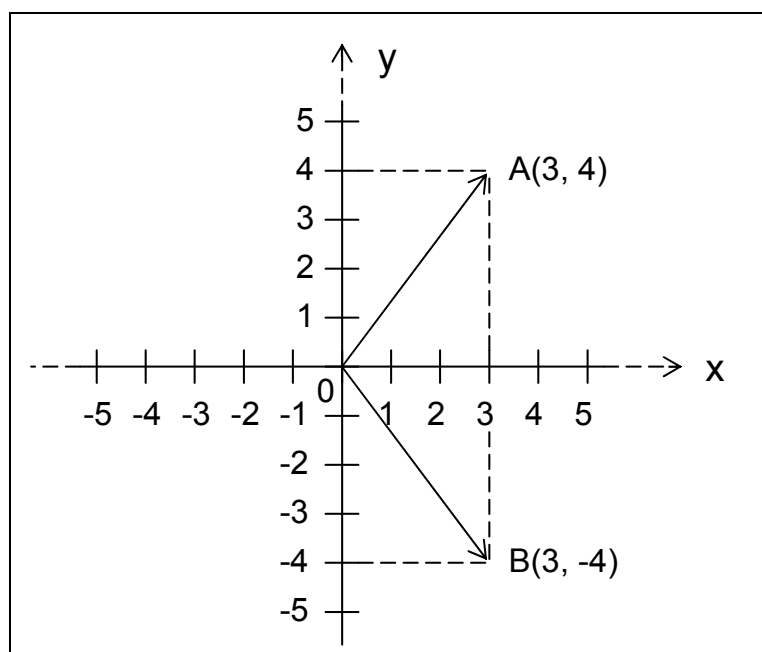


Fig. 17.2 Planul numerelor reale

Dacă se așază două astfel de axe perpendiculare una pe alta se obține un **sistem de coordonate rectangular (sau cartezian)**. Axa orizontală, Ox, se numește **axa absciselor**, iar axa verticală, Oy, se numește **axa ordonatelor**. Pe axa ordonatelor, numerele pozitive sunt reprezentate de la origine în sus, iar cele

negative de la origine în jos. Într-un astfel sistem de coordonate, fiecare punct din plan este unic determinat dacă i se dau cele două coordonate, una pe axa orizontală, numită **abscisă**, notată cu **x** și alta pe axa verticală, numită **ordonată**, notată cu **y**. Astfel, punctul A din plan are abscisa $x=3$ și ordonata $y=4$. Se scrie $A(3, 4)$ și se citește “punctul A de coordonate 3 și 4”. Intersecția celor două axe de coordonate se numește **originea** axelor de coordonate. Originea se notează cu litera O dar ea poate fi interpretată și ca cifra zero, atât pentru axa x cât și pentru axa y. Distanța de la origine la un punct din plan este dată de relația:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (17.1.1)$$

Astfel, distanța de la origine la punctul B este $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Dacă pe cele două axe unitatea a fost reprezentată de un segment cu lungimea de 1 centimetru, atunci cifra 5 reprezintă 5 cm.

17.2 Numere imaginare

Unele numere reale sunt **pătrate perfecte**. De exemplu, 81 este un pătrat perfect pentru că el se obține fie din $9^2=9 \times 9=81$, fie din $(-9)^2=(-9) \times (-9)=81$. Alte pătrate perfecte sunt 4, 9, 16, 25 și așa mai departe. Numerele $\sqrt{81}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, etc. pot fi reprezentate pe axa numerelor reale prin numerele ± 9 , ± 2 , ± 3 , ± 5 etc.

Matematicienii au rămas în dificultate când au încercat să reprezinte pe axa numerelor reale numere ca $\sqrt{-81}$, $\sqrt{-25}$, etc. Nu există nici-un număr care înmulțit cu el însuși să dea ca rezultat -81, -25, etc. S-a concluzionat că radical (rădăcina pătrată) din numerele negative nu pot fi reprezentate pe axa numerelor reale. De aceea aceste numere au fost denumite **numere imaginare**. Nu înseamnă că ele sunt fictive, ele sunt pur și simplu un alt tip de numere. Ca totuși să existe o reprezentare a numerelor imaginare s-a utilizat tot o axă verticală, numită **axa numerelor imaginare**, identică cu axa O-y din planul numerelor reale, cu o singură deosebire, ce va fi explicată imediat.

Se observă că $\sqrt{-9} = \sqrt{(9) \times (-1)} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = \pm 3 \times \sqrt{-1}$. Într-adevăr, $(-3 \times \sqrt{-1})^2 = -9$ și $(3 \times \sqrt{-1})^2 = -9$. Numărul imaginar $\sqrt{-1}$ a fost numit în matematică **unitatea imaginară**. El a fost notat cu litera *i* de la “imaginar”.

Pentru că în electrotehnică litera *i* este consacrată pentru simbolizarea curenților electrici variabili în timp, unitatea imaginară s-a notat cu litera *j*, deci $+j = +\sqrt{-1}$ și $-j = -\sqrt{-1}$. Deasemenea, $j3 = 3\sqrt{-1}$, $-j5 = -5\sqrt{-1}$. În figura 17.3 se arată axa numerelor imaginare. De la origine în sus sunt reprezentate numerele imaginare pozitive, iar de la origine în jos sunt reprezentate numerele imaginare negative. Pe axa numerelor imaginare nu vor fi reprezentate numere reale ca 3, 7, 20, etc., ci numere imaginare, ca $j3$, $j7$, $j20$, etc.

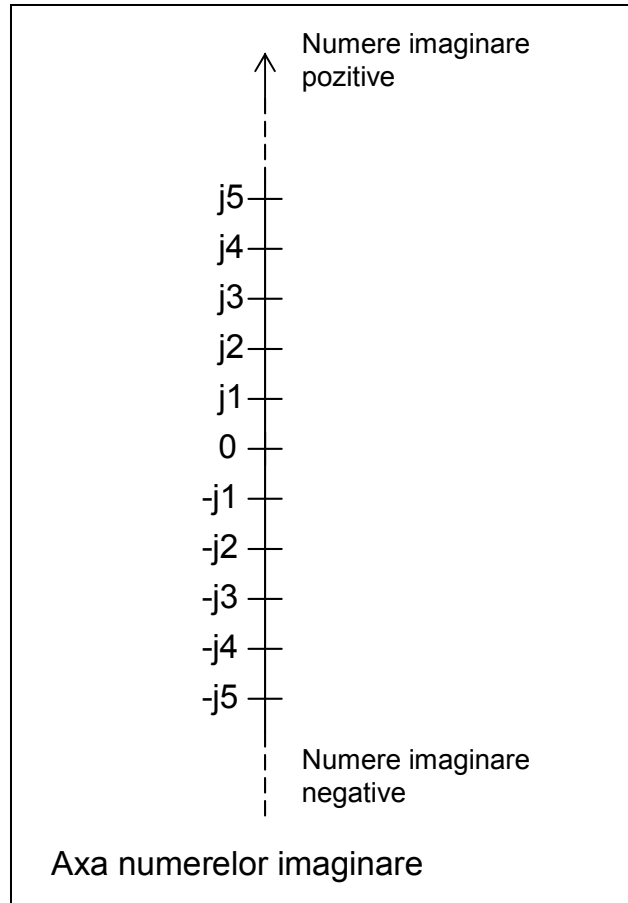


Fig.17.3. Axa numerelor imaginare

Unitatea imaginară $j = \sqrt{-1}$ se mai numeste si “operatorul j”. Câteva puteri ale lui j sunt: $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$; $j^3 = j \cdot j^2 = j \cdot (-1) = -j$; $j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ si asa mai departe.

17.3 Numere complexe. Planul complex. Reprezentarea numerelor complexe în coordonate rectangulare

Numerele complexe nu sunt asa de complicate (de complexe) pe cum rezultă din numele lor, ele sunt chiar foarte simple.

O sumă sau o diferență dintr-un număr real si un număr imaginar reprezintă un număr complex.

Conform “definitiei” anterioare orice număr complex are o parte reală si o parte imaginară. De exemplu, $3+j4$ este un număr complex. Numărul 3 este **partea reală** a numărului complex $3+j4$, iar numărul $+j4$ este **partea imaginară** a numărului complex $3+j4$. Un alt număr complex este de exemplu $-2 - j4$. Numărul -2 este partea reală a numărului complex $-2-j4$, iar $-j4$ este partea imaginară a numărului $-2-j4$.

Se observă că pentru a reprezenta un număr complex avem nevoie de două axe de coordonate, o axă pentru numerele reale și o altă axă pentru numerele imaginare. Cele două axe determină un plan, numit **planul numerelor complexe**, sau pe scurt **planul complex**. Axele planului complex nu se vor mai nota cu O-x și cu O-y, ci cu "+Re" de la "+ real", adică numerele reale pozitive se vor așeza la dreapta originii, în sensul arătat de săgeată, și cu "+Im", de la "+ imaginare", înțelegând prin aceasta că numerele imaginare pozitive se vor reprezenta de la origine în sus, în sensul arătat de săgeată, vezi Fig. 17.4.

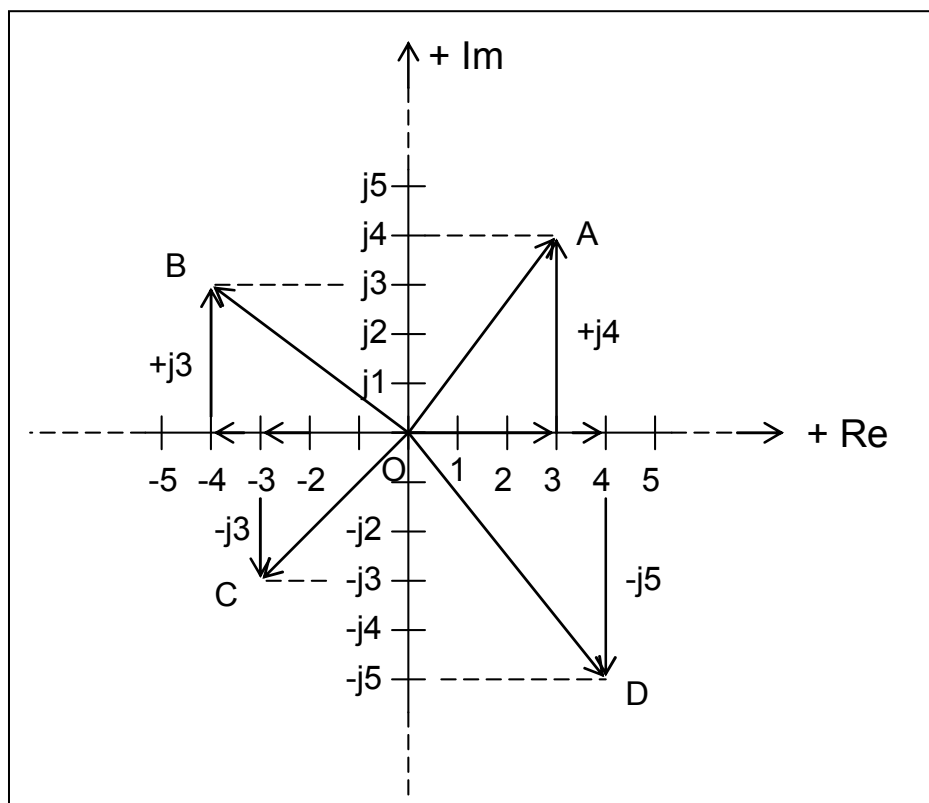


Fig. 17.4 Planul complex

Revenind la unul dintre exemplele de numere complexe, $3+j4$, trebuie spus că partea reală 3 nu se poate aduna algebric cu partea imaginară $+j4$, cum se adună 3 cu 4, $3+4=7$. Adunarea lui 3 cu $+j4$ se face vectorial. Aceasta înseamnă că prima dată se pleacă de la originea O, se merge pe axa reală și se așază numărul 3 acolo unde îi este locul. Apoi se merge pe o linie perpendiculară pe axa reală, deci paralel cu axa imaginară, în sus în cazul exemplului considerat, și se așază numărul imaginare $+j4$. S-a obținut astfel punctul A din planul complex. Care este mărimea, sau **modulul**, sau **valoarea absolută** a numărului complex $3+j4$? Notăm numărul $3+j4$ cu z_1 , adică $z_1=3+j4$. Mărimea, sau modulul numărului complex z_1 se notează cu $|z_1|$ și este definit astfel: $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Se poate spune că linia cu săgeată \overrightarrow{OA} , numită **vector**, sau în electrotehnică **fazor**,

care uneste punctul O cu punctul A, reprezintă numărul complex $3+j4$, pentru că punctul A are coordonatele $+3$ și $+j4$ și pentru că lungimea fazorului \overline{OA} este egală cu 5, cifră care reprezintă modulul, sau valoarea absolută a numărului complex $3+j4$.

Exemplu numeric: Care sunt modulele numerelor complexe reprezentate de punctele B, C și D din Fig. 17.4?

Soluție:

Punctul B are coordonatele -4 și $+j3$. Numărul complex $z_2 = -4 + j3$ este în mod unic reprezentat de fazorul \overline{OB} . Modulul lui este $|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Punctul C are coordonatele -3 și $+j3$. Numărul complex $z_3 = -3 + j3$ este în mod unic reprezentat de fazorul \overline{OC} . Modulul lui este $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} \cong 4.24$.

Punctul D are coordonatele $+4$ și $-j5$. Numărul complex $z_4 = 4 - j5$ este în mod unic reprezentat de fazorul \overline{OD} . Modulul lui este $|z_4| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \cong 6.40$.

Forma generală a numerelor complexe este $z = a + jb$. Dacă vom vedea numărul scris ca $a + jb$ ne dăm seama că este un număr complex, dar dacă scriem doar simbolul z nu ne dăm seama că acesta este un număr complex. Ca să se știe că un simbol este al unui număr complex, se subliniază acel simbol cu o liniuță. Alți autori folosesc o liniuță deasupra simbolului respectiv, sau scriu simbolul respectiv cu litere îngrosate. În acest articol voi utiliza prima variantă, adică \underline{z} ; aceasta înseamnă că \underline{z} este un număr complex și trebuie să fie de forma $a + jb$, deci $\underline{z} = a + jb$. Modulul lui \underline{z} notează simplu, cu z sau $|\underline{z}|$ și se notează astfel:

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Numărul $\underline{z}^* = a - jb$ se numește “**conjugatul**” numărului complex \underline{z} . Se observă că \underline{z}^* are același modul ca și \underline{z} , $z^* = |\underline{z}^*| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Reprezentarea numerelor complexe, așa cum au fost descrisă mai sus, este o **reprezentare în coordonate rectangulare**.

Sunt și alte moduri de reprezentare a numerelor complexe. Unul dintre acestea este reprezentarea a numerelor complexe în **coordonatele polare**.

17.4 Numerele complexe reprezentate în coordonate polare. Conversia coordonatelor rectangulare în coordonate polare

În Fig. 17.5a sunt reprezentate numerele complexe $\underline{Z}_1 = 3 + j4$ și $\underline{Z}_2 = 3 - j4$ în coordonate rectangulare, iar în Fig. 17.5b sunt reprezentate aceleși numere în **coordonate polare**. Ca să se ajungă la punctul A cu ajutorul coordonatelor

polare, se consideră un fazor \overline{OA} de lungime 5 unități, exact cât este modulul numărului $\underline{Z}_1 = 3 + j4$. Fazorul respectiv, cu punctul de început plasat în originea O, se suprapune peste sensul pozitiv al axei reale și apoi se rotește în jurul originii O în sens trigonometric (invers acelor de ceas) cu unghiul menționat, adică cu 53.13° în cazul numărului $\underline{Z}_1 = 3 + j4$, deci reprezentarea în coordonate polare a numărului $\underline{Z}_1 = 3 + j4$ este $\underline{Z}_1 = 5 \angle 53.13^\circ$. **Forma generală a unui număr complex scris în coordonate polare este: $\underline{Z} = |\underline{Z}| \angle \theta$, sau $\underline{Z} = Z \angle \theta$ unde atât $|\underline{Z}|$ cât și Z reprezintă modulul numărului complex, iar θ este unghiul cu care trebuie rotit fazorul pentru a se ajunge la punctul care reprezintă numărul complex respectiv.**

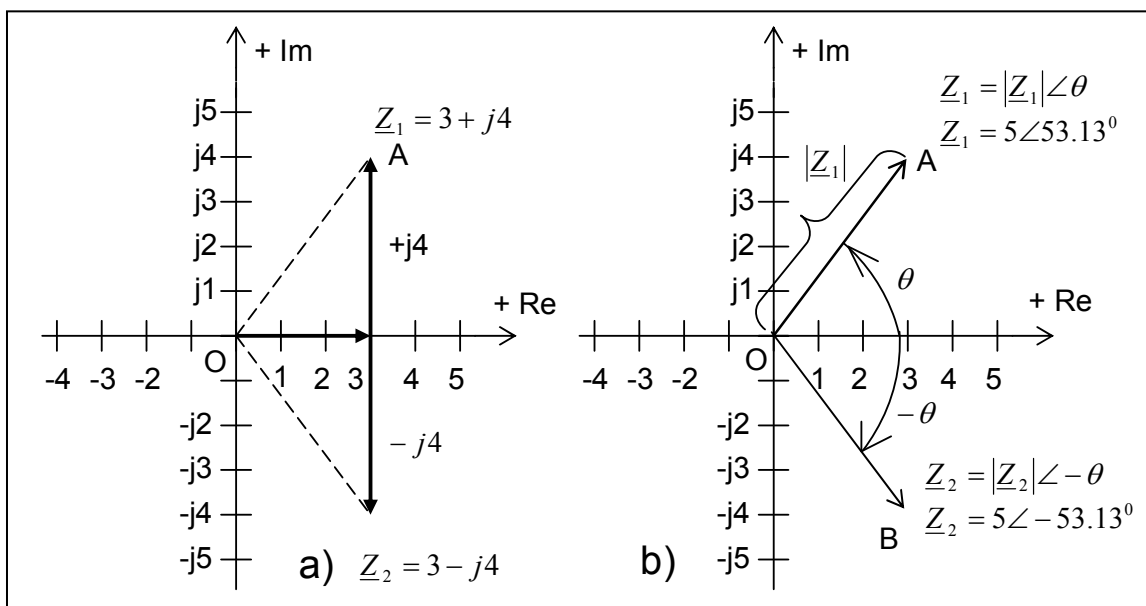


Fig. 17.5 a) Reprezentarea numerelor complexe în coordonate rectangulare
b) Reprezentarea numerelor complexe în coordonate polare

Pentru numărul complex $\underline{Z}_1 = 3 + j4$, mărimea unghiului θ a rezultat prin calculare tangentei unghiului θ , care este egală cu raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unghiului θ :

$$\tan \theta = \frac{4}{3} = 1.3333 \quad \theta = \arctan(1.3333) = \tan^{-1}(1.3333) = 53.13^\circ$$

Deci unghiul θ este egal cu arcul (unghiul) care are tangenta 1.3333. Acest unghi se calculează cu un calculator de buzunar mai performant.

Tot în Fig. 17.5a mai este reprezentat și numărul complex $\underline{Z}_2 = 3 - j4$. Pentru ca să-l reprezentăm în coordonate polare, prima dată i se calculează modulul și apoi unghiul cu care trebuie rotit fazorul respectiv:

$$Z_2 = |\underline{Z}_2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\tan \theta = \frac{-4}{3} = -1.3333; \quad \theta = \arctan(-1.3333) = \tan^{-1}(-1.3333) = -53.13^\circ$$

S-a obtinut un unghi negativ. Acest lucru înseamnă că fazorul va fi rotit în sens invers sensului trigonometric, adică în sensul acelor de ceas. Deci scrierea în coordonate polare a numărului $\underline{Z}_2 = 3 - j4$ este $\underline{Z}_2 = 5 \angle -53.13^\circ$.

În general, fie numărul complex $\underline{Z} = x + jy$. Pentru transformarea în coordonate polare se calculează modulul Z (sau $|\underline{Z}|$) al numărului complex \underline{Z} și unghiul θ dintre direcția pozitivă a axei numerelor reale și fazorul care reprezintă numărul complex:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ și } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (17.4.1)$$

$$\underline{Z} = Z \angle \theta \quad (17.4.2)$$

17.5 Conversia coordonatelor polare în coordonate rectangulare

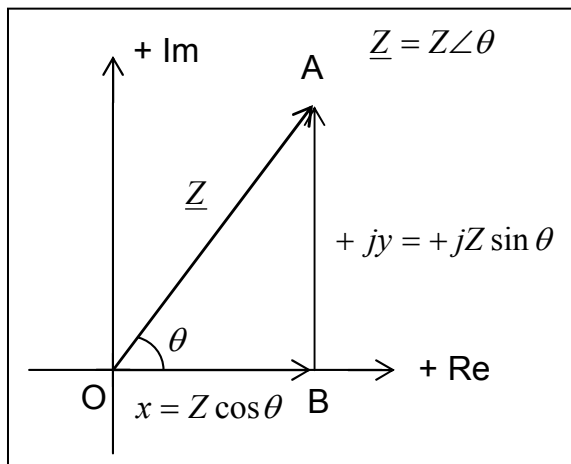


Fig. 17.6 Conversia coordonatelor polare în coordonate rectangulare

În Fig. 17.6 este reprezentat numărul complex $\underline{Z} = Z \angle \theta$ în coordonate polare, adică se cunoaște modulul Z și unghiul θ . Se dorește ca acest număr complex să se scrie sub forma $\underline{Z} = x + jy$, deci trebuie aflate x și y . În triunghiul dreptunghic OAB, sinusul unghiului θ este egal cu raportul dintre cateta opusă și ipotenuză, iar cosinusul unghiului θ este egal cu raportul dintre cateta alăturată și ipotenuză. Rezultă:

$$\sin \theta = \frac{\overline{AB}}{Z}; \quad \overline{AB} = y = Z \sin \theta; \quad \cos \theta = \frac{\overline{OB}}{Z}; \quad \overline{OB} = x = Z \cos \theta \quad (17.5.1)$$

Deci numărul complex \underline{Z} se va scrie în coordonate rectangulare în felul următor:

$$\underline{Z} = Z \cos \theta + jZ \sin \theta \quad (17.5.2)$$

Exemplu numeric: Să se convertească următoarele numere complexe scrise în coordonate polare, în numere complexe scrise în coordonate rectangulare:

a) $\underline{Z}_1 = 10\angle 60^\circ$; b) $\underline{Z}_2 = 4\angle -30^\circ$; c) $\underline{Z}_3 = 8\angle 45^\circ$

Soluție:

a) Se folosește un calculator de buzunar pentru calcularea funcțiilor sin și cos. Partea reală a numărului complex \underline{Z}_1 este: $x = 10 \cos 60^\circ = 10 \times 0.5 = 5$. Partea imaginară a numărului complex \underline{Z}_1 este: $y = 10 \sin 60^\circ = 10 \times 0.866 = 8.66$, rezultă: $\underline{Z}_1 = 5 + j8.66$.

b) Pentru \underline{Z}_2 calculele sunt similare. Rezultă: $x = 4 \cos(-30) = 4 \times 0.866 = 3.4641$; $y = 4 \sin(-30) = 4 \times (-0.5) = -2$, deci $\underline{Z}_2 = 3.4641 - j2$

c) La fel pentru \underline{Z}_3 ; $x = 8 \cos 45^\circ = 8 \times 0.7071 = 5.6568$; $y = 8 \sin 45^\circ = 8 \times 0.7071 = 5.6568$

17.6 Operatii matematice cu numerele complexe

Deoarece numerele care reprezintă partea reală și partea imaginară a unui număr complex nu se adună algebric, ci vectorial, trebuie stabilite niste reguli și pentru operațiile matematice cu numerele complexe.

17.6.1 Adunarea numerelor complexe

Suma a două numere complexe este egală cu suma dintre părțile reale și părțile imaginare ale numerelor complexe respective.

Exemplu:

a) $(2+j4) + (3+j5) = (2+3) + (j4+j5) = 5+j9$

b) $(4-j5) + (2+j3) = (4+2) + (-j5+j3) = 6-j2$

c) $(4+j5) + (2+j3) = (4+2) + (j5+j3) = 6+j8$

În general: $(a+jb) + (c+jd) = (a+c) + j(b+d)$ (17.6.1.1)

Pentru a aduna două numere complexe scrise în coordonate polare, mai întâi se convertesc numerele respective în coordonate rectangulare și apoi se face adunarea.

17.6.2 Scăderea numerelor complexe

Diferența a două numere complexe este egală cu suma dintre diferența părților reale și diferența părților imaginare.

Exemplu:

a) $(2+j3) - (5-j4) = (2-5) + [j3-(-j4)] = -3 + j7$

b) $(5+j4) - (3+j2) = (5-3) + (j4-j2) = 2 + j2$

c) $(-3+j2) - (6-j3) = (-3-6) + [j2-(-j3)] = -9+j5$

În general: $(a+jb) - (c+jd) = (a-c) + (jb-jd)$ (17.6.2.1)

Pentru a scădea două numere complexe scrise în coordonate polare, mai întâi se convertesc numerele respective în coordonate rectangulare și apoi se face scăderea.

17.6.3 Înmulțirea numerelor complexe

Înmulțirea numerelor complexe scrise în coordonate polare se face foarte ușor, se înmulțesc modulele și se adună algebric unghiurile (argumentele).

Exemplu: Să se înmulțească următoarele numere:

$$a) (3\angle 30^\circ) \cdot (5\angle 20^\circ) = (5 \cdot 3)\angle(30^\circ + 20^\circ) = 15\angle 50^\circ$$

$$b) (2\angle 25^\circ) \cdot (4\angle 65^\circ) = (2 \cdot 4)\angle(25^\circ + 65^\circ) = 8\angle 90^\circ$$

$$c) (5\angle 45^\circ) \cdot (2\angle -15^\circ) = (5 \cdot 2)\angle[45^\circ + (-15^\circ)] = 10\angle 30^\circ$$

În general:

$$(Z_1\angle\alpha) \cdot (Z_2\angle\beta) = Z_1 \cdot Z_2\angle(\alpha + \beta) \quad (17.6.3.1)$$

Se pot înmulți și numerele complexe scrise în coordonate rectangulare, dar este mai dificil.

Exemplu:

$$a) (2 + j3) \cdot (4 + j5) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot j5 + j3 \cdot 4 + j3 \cdot j5 = 8 + j10 + j12 - 15 = -7 + j22$$

$$b) (3 + j2) \cdot (5 + j3) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot j3 + j2 \cdot 5 + j2 \cdot j3 = 15 + j9 + j10 - 6 = 9 + j19$$

$$\text{În general: } (a + jb) \cdot (c + jd) = (a \cdot c - b \cdot d) + j(a \cdot d + b \cdot c) \quad (17.6.3.2)$$

17.6.4 Împărțirea numerelor complexe

Împărțirea numerelor complexe scrise în coordonate polare se face foarte ușor, se împart modulele și se scad unghiurile (argumentele).

Exemplu: Să se efectueze împărțirea următoarelor numere complexe:

$$a) (4\angle 50^\circ) \div (2\angle 30^\circ) = (4 \div 2)\angle(50^\circ - 30^\circ) = 2\angle 20^\circ$$

$$b) (6\angle 75^\circ) \div (3\angle -15^\circ) = (6 \div 3)\angle[75^\circ - (-15^\circ)] = 2\angle 90^\circ$$

$$\text{În general: } (a\angle\alpha) \div (b\angle\beta) = (a \div b)\angle(\alpha - \beta) \quad (17.6.4.1)$$

Se poate efectua și împărțirea a două numere complexe scrise în coordonate rectangulare, dar este mai dificil.

Exemplu: De data aceasta se va efectua împărțirea a două numere complexe pentru cazul general. Fie $\underline{Z}_1 = a + jb$ și $\underline{Z}_2 = c + jd$. Să se împartă aceste numere. Vom scrie împărțirea sub formă de raport:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

Ca să nu mai avem un număr complex la numitor se va înmulți atât numărătorul cât și numitorul cu $(c - jd)$, care este conjugatul numitorului. Această metodă se numește “rationalizarea numitorului”. Rezultă:

$$\underline{Z} = \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{(c + jd) \cdot (c - jd)}$$

Se calculează pe rând numărătorul și numitorul. Rezultă:

$$(a + jb) \cdot (c - jd) = a \cdot c - a \cdot jd + jb \cdot c - j^2 b \cdot d \quad \text{dar} \quad j^2 = -1. \text{ Rezultă:}$$
$$(a + jb) \cdot (c - jd) = a \cdot c - a \cdot jd + jb \cdot c - (-1)b \cdot d = a \cdot c + b \cdot d + j(b \cdot c - a \cdot d)$$

Acum se calculează numitorul:

$$(c + jd) \cdot (c - jd) = c^2 - c \cdot jd + jd \cdot c - j^2 b \cdot d = c^2 + d^2$$

Revenind la împărțirea celor două numere complexe, rezultă:

$$\underline{Z} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + j(b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2}$$

Se observă că la numitor nu mai este un număr complex. Acesta este rolul rationalizării numitorului.

Acum se va scrie numărul complex \underline{Z} ca o sumă dintre o parte reală și o parte imaginară. Rezultă:

$$\underline{Z} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d)}{c^2 + d^2} + j \frac{(b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2} \quad (17.6.4.2)$$

Exemplu numeric. Să se împartă numerele complexe $\underline{Z}_1 = 2 + j3$ și $\underline{Z}_2 = 5 - j2$

$$\underline{Z} = \frac{[2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)]}{3^2 + (-2)^2} + j \frac{[3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2)]}{3^2 + (-2)^2} = \frac{4}{16} + j \frac{19}{16} = 0.25 + j1.1875$$

După cum s-a văzut, la utilizarea relației (17.6.4.2) s-a ținut seama de semnele literelor care au compus numerele complexe.

17.6.5 Reprezentarea mărimilor sinusoidale în planul complex

Matematicianul german Leonard Euler (se pronunță Oiler) a descoperit un număr, care îi poartă numele și este notat cu litera e , de la Euler. Acest număr există în natură, este un număr real și are o infinitate de zecimale. El a fost ales ca bază a logaritmilor naturali.

Numărul e este limita unui sir, când n tinde către infinit:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2.71828... \text{ când } n \rightarrow \infty \quad (17.6.5.1)$$

Ca să înțelegem această limită, să presupunem că vrem să investim 1\$ (cantitate unitară) într-un program care permite dolarului investit să crească cu o rată de creștere egală cu valoarea sa pentru un an (unitate de timp). Pentru ușurarea calculelor considerăm anul împărțit în 10 părți. Conform ratei de creștere oferită de programul respectiv, după 0.1 ani dolarul va crește cu 0.1\$ și va deveni 1.1\$. De acum înainte cantitatea de 1.1\$ va crește la o rată de 1.1\$ pe an. După 0.2 ani, dolarul investit va crește la valoarea $1.10\$ + (1.1) \times (0.1)\$ = 1.1\$ + 0.11\$ = 1.21\$$. De acum înainte va crește cu 1.21\$ pe an, și așa mai departe. După un an, dolarul investit va câștiga în valoare și va deveni egal cu 2.718...\$.

Tot Euler a descoperit o formulă, care îi poartă numele:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (17.6.5.2)$$

După această incursiune în matematică revenim la reprezentarea mărimilor sinusoidale în planul complex.

Să considerăm o mărime sinusoidală care este variabilă în timp, de exemplu o tensiune alternativă:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (17.6.5.3)$$

unde:

$u(t)$ = tensiunea sinusoidală variabilă în timp, se citește “u de t”, [V];

U_m = valoarea maximă a tensiunii alternative, sau amplitudinea tensiunii alternative, [V];

$\omega = 2\pi f$ = pulsția tensiunii alternative luată în considerare, [rad/s];

f = frecvența tensiunii alternative, [Hz];

t = timpul scurs de la studierea fenomenului, [s];

α = faza inițială a tensiunii alternative, [rad].

Se încearcă să se reprezinte tensiunea $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ în planul complex. Acest lucru presupune ca tensiunii $u(t)$ să i se asocieze o mărime complexă, având modulul egal cu amplitudinea tensiunii și unghiul de fază (argumentul) egal cu faza mărimii sinusoidale. Asocierea este biunivocă. Se face deci reprezentarea:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)} \quad (17.6.5.4)$$

Factorul $e^{j(\omega t + \alpha)}$ nu reprezintă altceva decât faptul că fazorul U_m este rotit față de sensul pozitiv al axei reale cu unghiul $(\omega t + \alpha)$, pentru momentul t , vezi Fig. 17.7. Fazorul U_m se rotește în sens trigonometric (sens invers acelor de ceas) cu viteza unghiulară constantă ω .

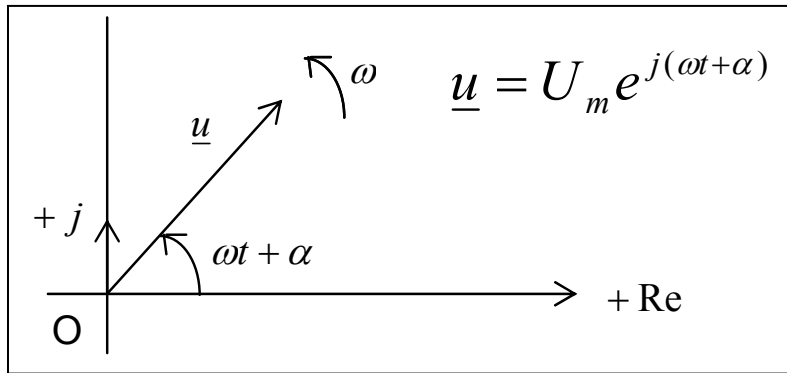


Fig. 17.7 Reprezentarea în complex a tensiunii sinusoidale $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$

În relația (17.6.5.4), aplicând formula lui Euler mărimii complexe \underline{u} asociată mărimii sinusoidale se obține:

$$\underline{u} = U_m \cos(\omega t + \alpha) + jU_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (17.6.5.5)$$

Din relația precedentă rezultă că partea imaginară a acestei mărimi complexe reprezintă tocmai mărimea sinusoidală de la care s-a plecat:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}\{\underline{u}\} \quad (17.6.5.6)$$

$\text{Im}\{\underline{u}\}$ se citește “partea imaginară a mărimii complexe \underline{u} ”.

Relația (17.6.5.6) exprimă regula de trecere inversă de la reprezentarea în complex la mărimea sinusoidală inițială. Această regulă este valabilă numai dacă pentru mărimea sinusoidală se folosește forma normală de exprimare în sinus (nu și în cosinus).

Reprezentarea în complex se poate simplifica. Dacă se dezvoltă relația (17.6.5.4) se obține:

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)} = U_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha} \quad (17.6.5.7)$$

În sume, sau alte relații matematice de mărimi sinusoidale de aceeași frecvență va apărea factorul comun $e^{j\omega t}$. Acest factor se poate suprima de la început în

toate mărimile în care intervine, fără a afecta prin această operațiune rezultatul final. Reprezentarea în complex care rezultă prin suprimarea factorului $e^{j\omega t}$ se numește “**reprezentarea în complex simplificată**”. În acest caz intervine următoarea reprezentare:

$$u(t) \rightarrow \underline{u} = U_m e^{j\alpha} \quad (17.6.5.8)$$

În această reprezentare (rel. 17.6.5.8) fiecărei mărimi sinusoidale i se asociază deci o mărime complexă care nu mai este funcție de timp, având modulul egal cu amplitudinea U_m și unghiul (argumentul) egal cu faza inițială α a mărimii sinusoidale. În Electrotehnică este uzuală reprezentarea în complex simplificată care are modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale U , adică:

$$u(t) \rightarrow \underline{U} = U e^{j\alpha} \quad (17.6.5.9)$$

Pentru trecerea inversă, de la reprezentarea în complex simplificată la mărimea sinusoidală în timp, se va ține seama de simplificările făcute, deci

$$u(t) = \text{Im}\{\sqrt{2}e^{j\omega t} \underline{U}\} = \text{Im}\{\sqrt{2}U e^{j(\omega t + \alpha)}\} \quad (17.6.5.10)$$

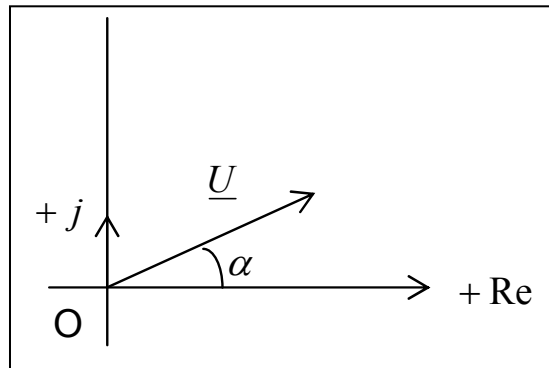


Fig. 17.7 Reprezentarea simplificată în planul complex

În Fig. 17.7 se poate vedea reprezentarea simplificată în planul complex a mărimilor sinusoidale care au pulsația ω . Fazorul reprezentat în Fig. 17.7b este un fazor imobil, pentru că s-a eliminat factorul $e^{j\omega t}$.

Exemplu numeric: Tensiunea momentană la bornele unui circuit electric alimentat în alternativ și curentul prin circuit sunt date de relațiile:

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \alpha); \quad i = I_m \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi). \text{ Să se determine impedanța circuitului.}$$

Soluție: Impedanța este raportul dintre tensiune și curent:

$$Z = \frac{U_m \sin(\omega t + \alpha)}{I_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi)} = \frac{U_m}{I_m} \cdot \frac{\sin(\omega t + \alpha)}{\sin(\omega t + \alpha - \varphi)}$$

Este dificil de calculat raportul dintre cele două sinusuri. De aceea se reprezintă tensiunea și curentul în complex.

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)} \quad \underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \alpha - \varphi)} \quad \text{Rezultă:}$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{I_m e^{j(\omega t + \alpha - \varphi)}} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\omega t + \alpha) - j(\omega t + \alpha - \varphi)} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Rezultă că modulul impedanței este egal cu raportul dintre amplitudinile tensiunii și curentului, sau cu raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii și valoarea efectivă a curentului:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\sqrt{2} \cdot U}{\sqrt{2} \cdot I} = \frac{U}{I}$$

Fazorul \underline{Z} este rotit în sens trigonometric față de sensul pozitiv al axei reale cu unghiul φ .

18. Folosirea numerelor complexe la rezolvarea circuitelor de curent alternativ

Sunt unele situații în care se cere să se determine diferite mărimi din circuitele electrice formate din rezistențe, bobine și condensatori în diferite conexiuni. Pentru rezolvarea unor astfel de circuite numerele complexe simplifică mult calculele. Pentru acest lucru trebuie amintite regulile stabilite în paragrafele anterioare din acest articol și anume:

În circuite electrice alimentate în curent alternativ căderea de tensiune pe o rezistență este în fază cu curentul prin rezistență, curentul printr-o inductanță pură este defazat cu 90° în urma tensiunii de la bornele inductanței și curentul printr-un condensator fără pierderi este defazat cu 90° înaintea tensiunii de la bornele condensatorului.

Pentru rezolvarea circuitelor respective mărimile care intervin se vor reprezenta în planul complex. Pe axa reală va fi reprezentată rezistența, $R + j0 = R$ iar pe axa imaginară cele două reactanțe. Reactanța inductivă se va reprezenta în sensul pozitiv al axei imaginare, $+jX_L$, iar reactanța capacivă în sensul negativ al axei imaginare, $-jX_C$.

Rezolvarea unui circuit serie R-L-C: Se consideră circuitul din Fig. 18.1. Se cere să se calculeze impedanța circuitului, curentul prin circuit și căderile de tensiune

pe elementele circuitului. Să se precizeze relațiile de fază între mărimile care intervin în circuit.

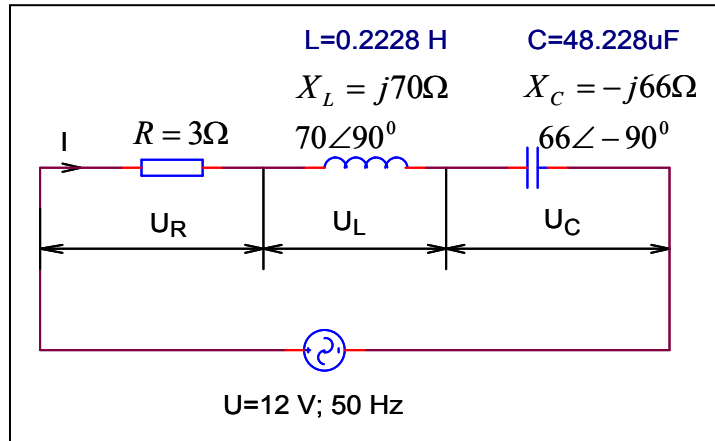


Fig. 18.1 Circuit serie R-L-C

Soluție: a) Impedanta circuitului: $\underline{Z} = 3 + j70 - j66 = 3 + j4$

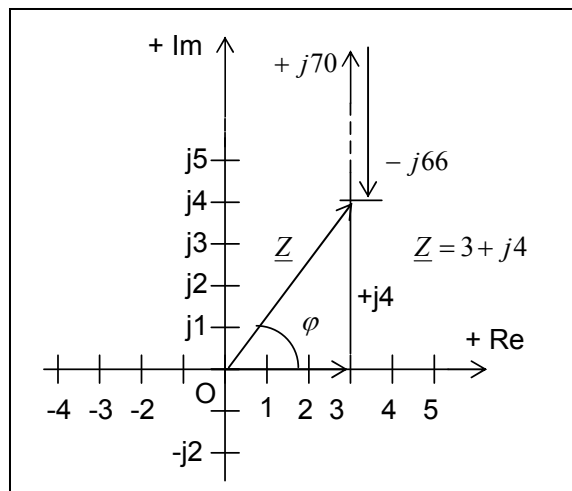


Fig. 18.2 Diagrama impedanțelor din exemplul numeric

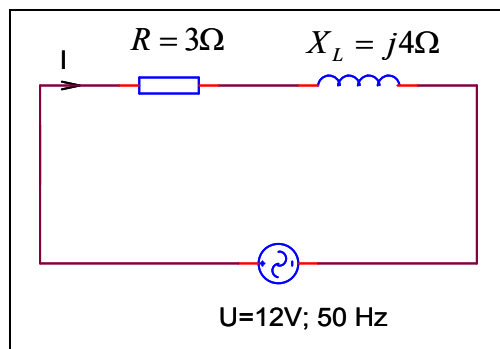


Fig. 18.3. Circuit echivalent cu cel din Fig. 18.1

Pentru că reactanta totală a circuitului este +j4, aceasta înseamnă că reactanta netă a circuitului este inductivă (semnul plus). Circuitul dat este echivalent cu circuitul din Fig. 18.3.

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{4}{3} = 1.3333 \qquad \varphi = \arctan = \tan^{-1}(1.3333) = 53.13^{\circ}$$

$$Z = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ } [\Omega]; \underline{Z} = 5 \angle 53.13^{\circ} \text{ } [\Omega]. \text{ Mărimea impedantei este } 5 \text{ } \Omega.$$

b) Tensiunea de alimentare.

Tensiunea de alimentare este $U=12 \text{ V}$, este un număr real. O considerăm reprezentată în axa reală. Fată de ea va rezulta unghiul de defazaj dintre tensiune și curent.

$$\underline{U} = 12 \angle 0^{\circ} \text{ } [\text{V}]$$

c) Curentul prin circuit

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{12 \angle 0^{\circ}}{5 \angle 53.13^{\circ}} = (12 \div 5) \angle (0^{\circ} - 53.13^{\circ}) = 2.4 \angle -53.13^{\circ} \text{ } [\text{A}]$$

A rezultat că modulul curentului este 2.4 A și unghiul de fază este -53.13° . Aceasta înseamnă că defazajul dintre tensiune și curent este de 53.13° , curentul fiind în urma tensiunii. Unghiul negativ era de așteptat, pentru că circuitul echivalent este unul inductiv, vezi Fig. 18.3.

d) Căderile de tensiune pe elementele circuitului

$$\underline{U}_R = \underline{I} \cdot \underline{R} = (2.4 \angle -53.13^{\circ}) \cdot (3 \angle 0^{\circ}) = (2.4 \cdot 3) \angle (-53.13^{\circ} + 0^{\circ}) = 7.2 \angle -53.13^{\circ}$$

Unghiul de fază al căderii de tensiune pe rezistență este același cu al curentului prin circuit, ceea ce era de așteptat. Deci căderea de tensiune pe rezistență este în fază cu curentul prin circuit.

$$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot \underline{X}_L = (2.4 \angle -53.13^{\circ}) \cdot (70 \angle 90^{\circ}) = (2.4 \cdot 70) \angle (-53.13^{\circ} + 90^{\circ}) = 168 \angle 36.87^{\circ} \text{ } [\text{V}]$$

A rezultat că valoarea căderii de tensiune pe reactanta inductivă este de 168 V, iar unghiul dintre această tensiune și curentul din circuit este de $53.13^{\circ} + 36.87^{\circ} = 90^{\circ}$, curentul fiind în urma tensiunii de pe reactanta inductivă (de pe bobină).

$$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot \underline{X}_C = (2.4 \angle -53.13^{\circ}) \cdot (66 \angle -90^{\circ}) = 158.4 \angle -143.13^{\circ} \text{ } [\text{V}]$$

A rezultat că valoarea căderii de tensiune pe reactanta capacitivă este de 158.4 V, iar unghiul de fază dintre această tensiune și curentul din circuit este de $143.13^\circ - 53.13^\circ = 90^\circ$.

Relatiile de fază dintre mărimile care sunt în circuit sunt arătate în Fig. 18.4.

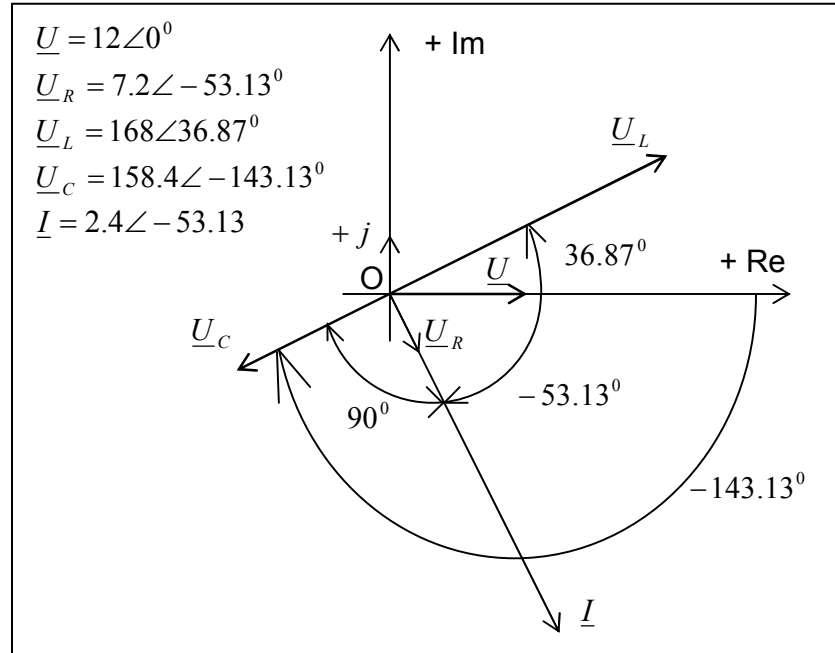


Fig. 18.4 Diagrama fazorială a mărimilor din circuitul prezentat în Fig. 18.1

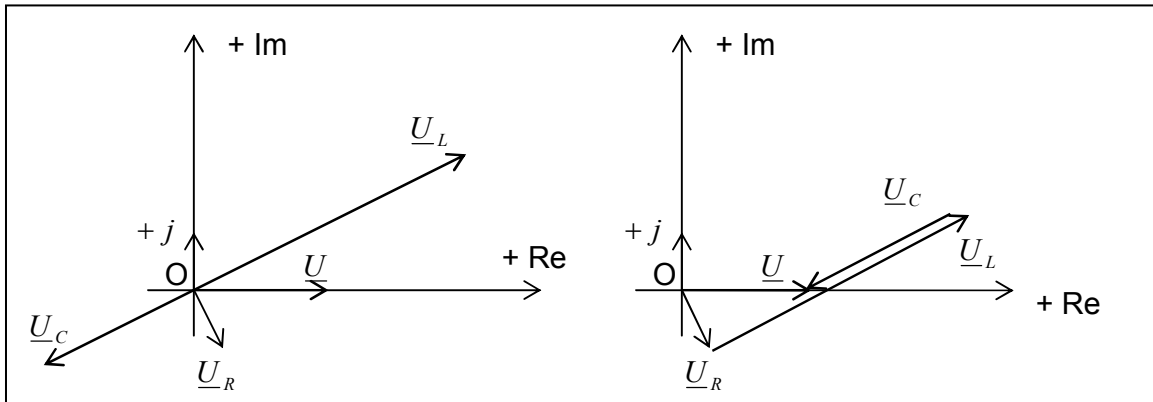


Fig. 18.5 Suma geometrică a tensiunilor din circuitul analizat

Dacă din Fig. 18.4 se înlătură unghiurile și valorile numerice se obține Fig. 18.5, în care se vede că suma geometrică a căderilor de tensiune pe rezistență, inductanță și capacitate este egală cu tensiunea de alimentare a circuitului:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

Analizând valorile căderilor de tensiune din circuit se constată valori mult mai mari decât tensiunea de alimentare pe reactanta inductivă și pe reactanta capacitivă. Aceasta se datorează faptului că circuitul se află aproape de

rezonanta serie, reactantele inductivă și capacitivă fiind destul de apropiate ca valoare, 70 și 66 ohm.

Dacă toți fazorii din figurile 18.4 și 18.5 se rotesc în sens trigonometric cu 53.13° , tensiunea de alimentare \underline{U} nu va mai fi reprezentată în axa reală și va avea aceeași poziție ca impedanța reprezentată în Fig. 18.2; căderile de tensiune de pe reactantele inductivă și capacitivă vor avea aceeași orientare ca și reactantele inductivă și capacitivă din Fig. 18.2.

Rezolvarea unui circuit serie-paralel:

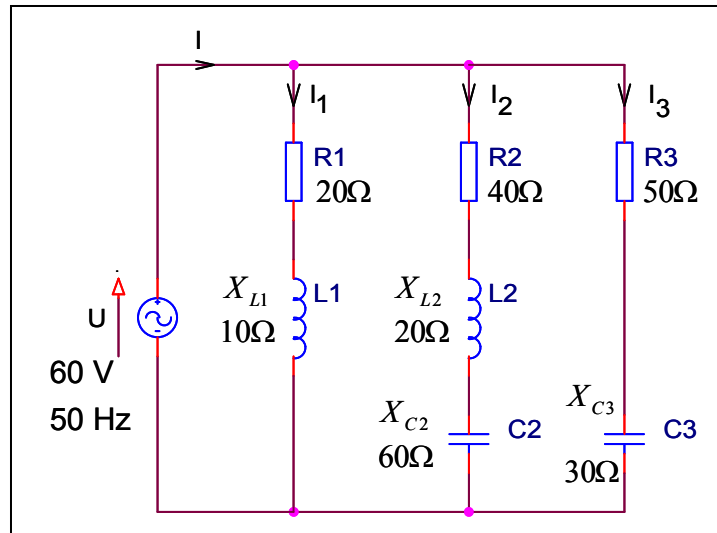


Fig. 18.6 Circuit serie-paralel

În Fig. 18.6 se prezintă un circuit format din 3 ramuri: o ramură R-L, o ramură R-L-C și o ramură R-C. Se cere să se calculeze: a) impedanța fiecărei ramuri, b) curentul prin fiecare ramură, c) curentul total și impedanța totală.

Soluție:

a) Impedanțele ramurilor

$$\underline{Z}_1 = 20 + j10; \quad Z_1 = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22.36\Omega;$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{10}{20}\right) \cong 26.60^\circ; \quad \underline{Z}_1 = 22.36 \angle 26.60^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 40 + j20 - j60 = 40 - j40; \quad Z_2 = \sqrt{40^2 + 40^2} = \sqrt{3200} = 56.56\Omega$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-40}{40}\right) = -45^\circ \quad \underline{Z}_2 = 56.56 \angle -45^\circ$$

$$\underline{Z}_3 = 50 - j30; \quad Z_3 = \sqrt{50^2 + (-30)^2} = \sqrt{3400} = 58.31\Omega$$

$$\varphi_3 = \tan^{-1}\left(\frac{-30}{50}\right) = -30.96 \cong -31^\circ \quad \underline{Z}_3 = 58.31 \angle -31^\circ$$

b) Curentii prin ramuri. Fiecare ramură este alimentată la aceeași tensiune. Considerăm tensiunea în axa reală, adică $\underline{U} = 60\angle 0^\circ$. Rezultă:

$$\underline{I}_1 = \frac{60\angle 0^\circ}{22.36\angle 26.60^\circ} = 2.68\angle -26.60^\circ; \quad I_1 = 2.68A$$

$$\underline{I}_1 = 2.68 \cdot \cos(-26.60^\circ) + j2.68 \cdot \sin(-26.60^\circ) = 2.4 - j1.2$$

$$\underline{I}_2 = \frac{60\angle 0^\circ}{56.56\angle -45^\circ} = 1.06\angle 45^\circ; \quad I_2 = 1.06A$$

$$\underline{I}_2 = 1.06 \cdot \cos 45^\circ + j1.06 \cdot \sin 45^\circ = 0.75 + j0.75$$

$$\underline{I}_3 = \frac{60\angle 0^\circ}{58.31\angle -31^\circ} = 1.03\angle 31^\circ; \quad I_3 = 1.03A$$

$$\underline{I}_3 = 1.03 \cdot \cos 31^\circ + j1.03 \cdot \sin 31^\circ = 0.883 + j0.53$$

c) Curentul total:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (2.4 - j1.2) + (0.75 + j0.75) + (0.883 + j0.53) = 4.033 + j0.08 \cong 4.03A$$

În formă polară curentul se scrie: $\underline{I} = 4.03\angle 0^\circ$ [A]

d) Impedanta totală:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{60\angle 0^\circ}{4.03\angle 0^\circ} = 14.88\angle 0^\circ \text{ } [\Omega]$$

Rezultă că circuitul complex din figura 18.6 se reduce doar la o rezistență cu valoarea 14.88 ohm, fără nici-o reactanță în serie, alimentată la 60 V.

Transformări de impedante:

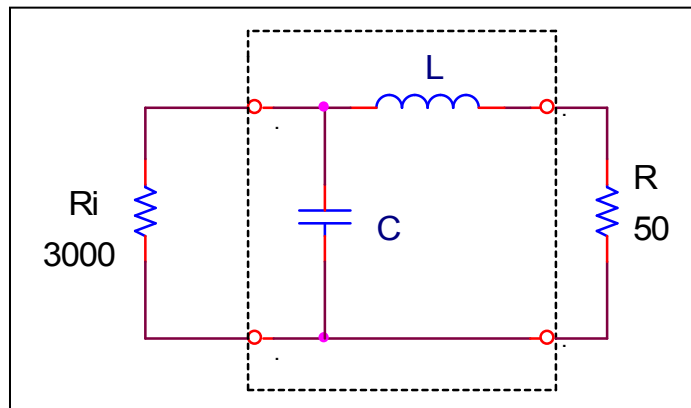


Fig. 18.7. Circuit de adaptare între două rezistențe de valori diferite

Seconsideră că rezistența R_i este rezistența internă a unui etaj final și rezistența R este rezistența “văzută” de etajul final la intrarea în linia de alimentare a antenei. Pentru transferul unui maxim de putere către antenă trebuie ca rezistența internă a etajului final să fie egală cu rezistența “văzută” de etajul final la intrarea în linia de alimentare. Acest lucru se poate face cu un condensator și o bobină conectate ca în Fig. 18.7. Să vedem cum lucrează acest circuit de adaptare (transmatch).

Se consideră prima dată circuitul paralel format din R_i și condensatorul C .

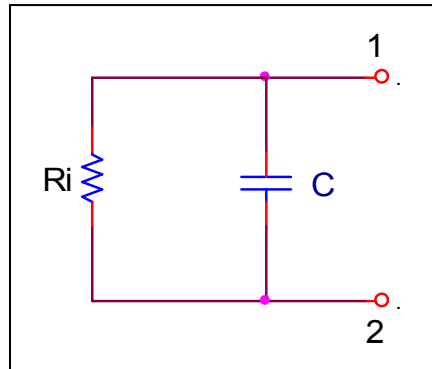


Fig. 18.8 Circuit paralel format din R_i și C

Se dorește să se afle un circuit echivalent cu circuitul din Fig. 18.8. Trebuie să se afle impedanța circuitului. Ne reamintim că în curent continuu, rezistența echivalentă a unui grup de rezistențe în paralel este dată de relația:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (18.1)$$

În curent alternativ apar impedanțe. Impedanța echivalentă a unui grup de impedanțe în paralel este dată de relația:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (18.2)$$

În Fig. 18.8 impedanțele în paralel sunt $Z_1 = R_i$ și $Z_2 = -jX_C$. Rezultă:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{R_i - jX_C}{-jR_iX_C} \quad Z = \frac{-jR_iX_C}{R_i - jX_C}$$

Se rationalizează numitorul, adică se amplifică fracția cu conjugatul numitorului:

$$Z = \frac{-jR_iX_C}{R_i - jX_C} = \frac{-jR_iX_C(R_i + jX_C)}{(R_i - jX_C) \cdot (R_i + jX_C)} = \frac{-jR_iX_C(R_i + jX_C)}{R_i^2 + X_C^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{-jR_i^2 X_C - j^2 R_i X_C^2}{R_i^2 + X_C^2} = \frac{-jR_i^2 X_C + R_i X_C^2}{R_i^2 + X_C^2} = \frac{R_i X_C^2}{R_i^2 + X_C^2} - j \frac{R_i^2}{R_i^2 + X_C^2}$$

Facem următoarele notatii:

$$R_1 = \frac{R_i X_C^2}{R_i^2 + X_C^2}; \quad X_{C1} = \frac{R_i^2 X_C}{R_i^2 + X_C^2}$$

Se obtine: $\underline{Z} = R_1 - jX_{C1}$, adică circuitul echivalent cu cel paralel din Fig.18.8 este format dintr-o rezistență în serie cu un condensator, vezi Fig.18.9.

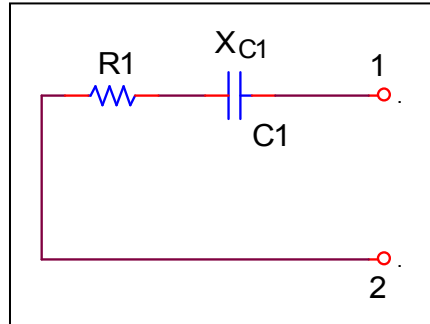


Fig. 18.9 Circuit R-C serie echivalent cu circuitul paralel din Fig. 18.8

Se pune conditia ca rezistenta R1 din circuitul arătat în Fig.18.9 să fie egală cu rezistenta R, adică:

$$R_1 = \frac{R_i X_C^2}{R_i^2 + X_C^2} = R$$

Rezolvând această ecuație în raport cu X_C se obtine: $X_C = R_i \sqrt{\frac{R}{R_i - R}}$, relatie

din care se calculează mărimea capacității C din Fig. 18.8. Circuitul serie echivalent din figura 18.9 se va înseria cu o inductanță cu valoarea reactanței inductive egală cu a reactanței capacitive, astfel încât $-jX_{C1} + jX_L = 0$. Se obtine circuitul adaptat din Fig. 18.10.

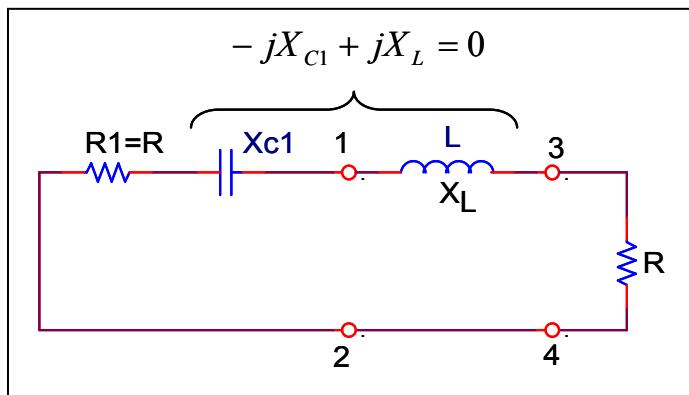


Fig. 18.10 Circuit adaptat

În Fig. 18.7 sunt date valorile numerice pentru $R_i = 3000\Omega$ și $R = 50\Omega$. Se obține:

$$X_C = R_i \sqrt{\frac{R}{R_i - R}} = 3000 \sqrt{\frac{50}{3000 - 50}} = 390.56\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} \quad X_L = 2\pi f L \quad L = \frac{X_L}{2\pi f}$$

Pentru o anumită frecvență vor rezulta valorile pentru capacitatea C a condensatorului și inductanța L a bobinei. Cele două reactanțe se vor anula reciproc și astfel în circuit rămân doar cele două rezistențe R_1 și R care au devenit egale, condiție cerută de teorema transferului maxim de putere activă.

Circuitul echivalent al unui circuit R-L-C paralel:

Cu ajutorul calculului în planul complex se demonstrează că orice circuit paralel $R_p-L_p-C_p$ are un circuit echivalent serie $R_s-L_s-C_s$.

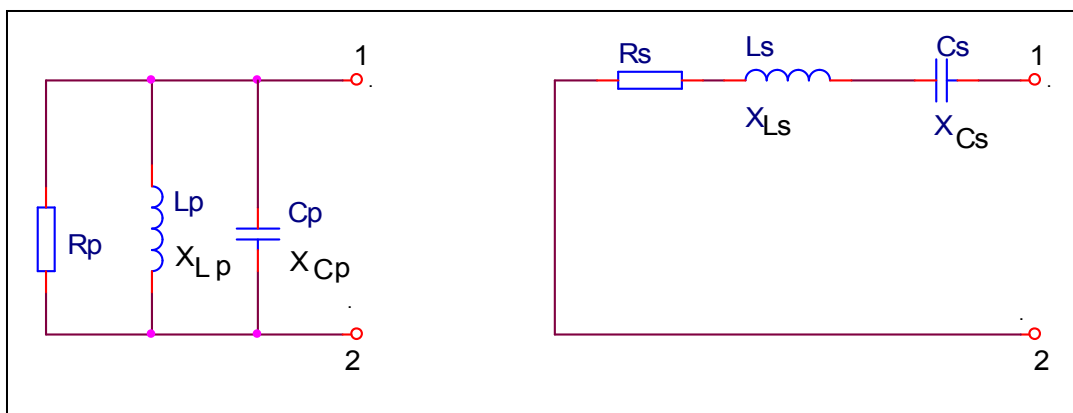


Fig. 18.11 Circuit paralel R-L-C echivalent cu un circuit serie R-L-C

Între valorile rezistențelor, inductanțelor și capacităților din conexiunea paralel și aceleași elemente din conexiunea serie, există relații de transformare. Calculul în complex conduce la aflarea acestor relații. Dacă circuitele sunt echivalente, o sursă conectată între terminalele 1 și 2 la conexiunea paralel va vedea aceeași impedanță ca și în cazul în care ar fi conectată la conexiunea serie la terminalele 1 și 2..

19. Teorema transferului maxim de putere activă

Schema echivalentă a unui consumator conectat la un generator de tensiune alternativă este prezentată în Fig.19.1.

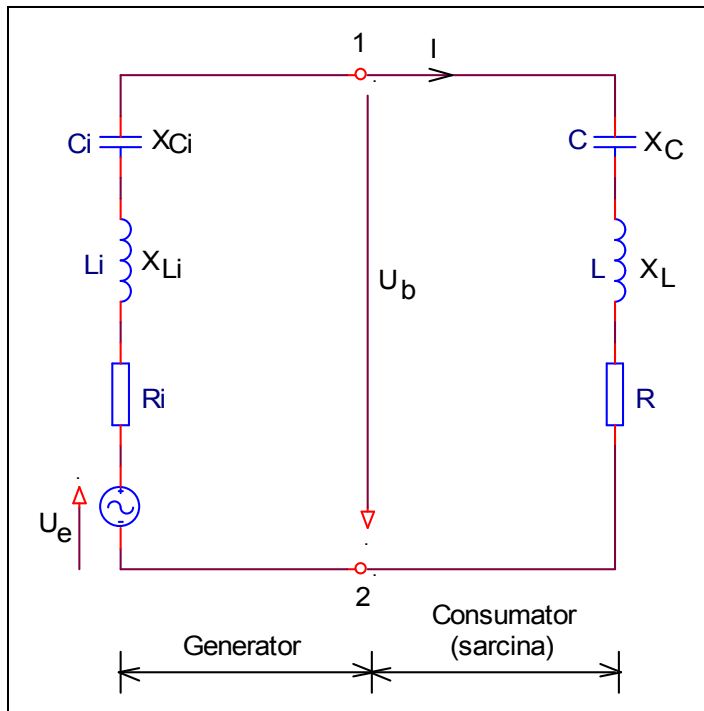


Fig. 19.1 Schema echivalentă a unui consumator conectat la un generator de tensiune alternativă

Se vede că atât generatorul cât și consumatorul sunt formate din trei elemente de circuit conectate în serie: un rezistor, un inductor (o bobină) și un condensator. În plus, la generator, în serie cu cele trei elemente de circuit, mai este și sursa de tensiune electromotoare, cu tensiunea U_e .

U_e = valoarea efectivă a tensiunii electromotoare a generatorului, [V];

R_i = rezistența internă a generatorului, [Ω];

L_i = inductanța internă a bobinei generatorului, măsurată în henry, [H];

X_{Li} = reactanța inductivă internă a bobinei generatorului, [Ω];

C_i = capacitatea internă a generatorului, măsurată în farad, [F];

X_{Ci} = reactanța capacitivă internă a generatorului, [Ω];

R = rezistența consumatorului, [Ω];

L = inductanța consumatorului, [H];

X_L = reactanța inductivă a consumatorului, [Ω];

C = capacitatea consumatorului, [F];

X_C = reactanța capacitivă a consumatorului, [Ω];

U_b = valoarea efectivă a tensiunii la bornele generatorului, [V];

I = valoarea efectivă a curentului prin circuit, [A].

Într-un circuit serie, reactanta totală din circuit este egală cu diferența dintre reactanta inductivă și cea capacitivă. Astfel, pentru generator și pentru sarcină se poate scrie:

$$X_i = X_{Li} - X_{Ci} \quad X = X_L - X_C \quad (19.1)$$

Din relația (19.1) se vede că dacă $X_L > X_C$ atunci circuitul are o reactanță netă inductivă și invers, dacă $X_L < X_C$, atunci circuitul are o reactanță netă capacitivă și va avea semnul minus.

Tensiunea produsă de generator este alternativă, înseamnă că limitarea curentului prin circuit se face de impedanța generatorului înseriată cu impedanța sarcinii. Ținând cont de relațiile (19.1), circuitul inițial reprezentat în Fig.19.1 devine echivalent cu cel prezentat în Fig.19.2.

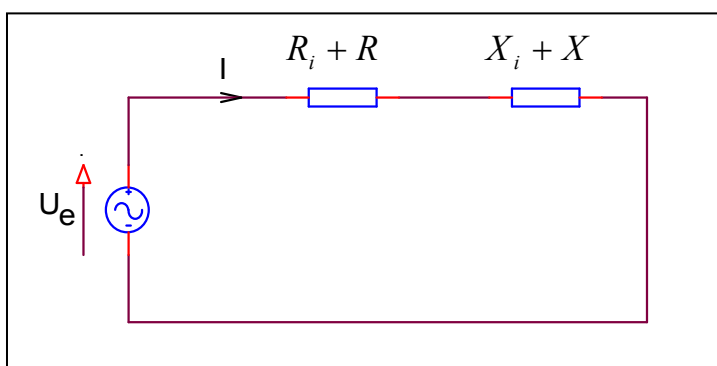


Fig. 19.2 Schema echivalentă a circuitului din Fig.19.1

Conform figurii 19.2, impedanța totală a circuitului este:

$$Z_T = \sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} \quad (19.2)$$

Valoarea curentului prin circuit este dată de raportul dintre tensiunea electromotoare a generatorului și impedanța totală a circuitului:

$$I = \frac{U_e}{\sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}} \quad [\text{A}] \quad (19.3)$$

Puterea este consumată doar de rezistențele din circuit, reactanțele nu consumă putere, dar contribuie la limitarea curentului. Deci **puterea generatorului va fi disipată pe rezistența internă a generatorului și pe rezistența sarcinii.**

Puterea consumată de rezistența sarcinii este dată de relația:

$$P = RI^2 = R \cdot \left[\frac{U_e}{\sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}} \right]^2 = R \cdot \frac{U_e^2}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} \quad (19.4)$$

Din relatia (19.4) rezultă că pentru ca puterea consumată să fie maximă trebuie ca valoarea numitorului expresiei (19.4) să fie minimă. Din punct de vedere al reactantelor acest lucru se întâmplă dacă:

$$X_i + X = 0, \text{ sau } X_i = -X \quad (19.5)$$

Acest lucru înseamnă că dacă reactanta netă a generatorului este inductivă, atunci reactanta consumatorului să fie capacitivă, și invers.

Considerând îndeplinită condiția $X_i + X = 0$ relatia (19.4) devine:

$$P = U_e^2 \cdot \frac{R}{(R_i + R)^2} = U_e^2 \cdot \frac{R}{R_i^2 + 2R_iR + R^2} = U_e^2 \cdot \frac{1}{2R_i + \left(R + \frac{R_i^2}{R} \right)} \quad (19.6)$$

Primul termen al numitorului expresiei (19.6) este $2R_i$, care este constant, în sensul că generatorul este dat și nu-și poate modifica rezistența internă. Rezultă că numitorul este minim numai dacă al doilea termen al numitorului, $\left(R + \frac{R_i^2}{R} \right)$,

este minim. Cum produsul dintre R și $\frac{R_i^2}{R}$ este constant ($R \cdot \frac{R_i^2}{R} = R_i^2 = \text{const.}$, pentru că rezistența internă a generatorului este constantă) suma acestor termeni este minimă numai atunci când termenii sunt egali, adică atunci când:

$$R = R_i \quad (19.6)$$

Cele două condiții ale transferului maxim de putere activă sunt:

$$X_i + X = 0 \text{ și } R = R_i$$

Condițiile găsite pentru adaptare se exprimă în cuvinte astfel:

Pentru ca o sarcină să absoarbă maximum de putere activă de la un generator trebuie ca rezistența sarcinii să fie egală cu rezistența internă a generatorului, iar reactanta sarcinii să fie egală și opusă cu reactanta internă a generatorului; dacă reactanta internă a generatorului este inductivă, atunci reactanta sarcinii trebuie să fie capacitivă și invers, dar

ambele sã aibã aceeași valoare absolutã. Se spune cã receptorul este adaptat cu generatorul din punct de vedere al puterii maxime.

Dacã în relația (19.6) se pune condiția $R = R_i$ se obține valoarea puterii maxime transferatã de la generator la receptor (sarcinã):

$$P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i} \quad (19.7)$$

Dacã condiția $X_i + X = 0$ este îndeplinitã atunci puterea totalã disipatã în circuit este disipatã pe rezistența internã a generatorului și pe rezistența sarcinii:

$$P_t = (R_i + R)I^2 = (R_i + R) \cdot \frac{U_e^2}{(R_i + R)^2} = \frac{U_e^2}{R_i + R} \quad (19.8)$$

În cazul adaptãrii ($X = -X_i$ și $R = R_i$), puterea totalã didipatã în circuit este:

$$P_{t.ad} = 2R_i I^2 = \frac{U_e^2}{2R_i} \quad (19.9)$$

Rezultã cã în cazul adaptãrii, jumãtãte din puterea generatorului se consumã pe propria rezistenã internã și cealaltã jumãtate pe rezistența de sarcinã.

Randamentul corespunzãtor transferului maxim de putere este

$$\eta = \frac{P_{\max}}{P_{t.ad}} = \frac{\frac{U_e^2}{4R_i}}{\frac{U_e^2}{2R_i}} = 0.5 \quad (19.10)$$

Reamintim cã puterea disipatã pe rezistența de sarcinã este datã de relația (19.6), care dupã simplificarea cu R devine:

$$P = \frac{U_e^2}{\frac{R_i^2}{R} + 2R_i + R} \quad (19.11)$$

Dacã se considerã rezistența R a sarcinii ca o variabilã, atunci se poate reprezenta grafic puterea P în funcție de R . O simplã reprezentare în funcție de valoarea în ohmi a rezistenței sarcinii nu ne spune nimic. Va trebui sã mãsurãm

rezistența sarcinii în multiplii ai rezistenței interne R_i . În acest caz graficul puterii transferate de la generator la sarcină, în funcție de rezistența sarcinii, arată ca în Fig. 19.3.

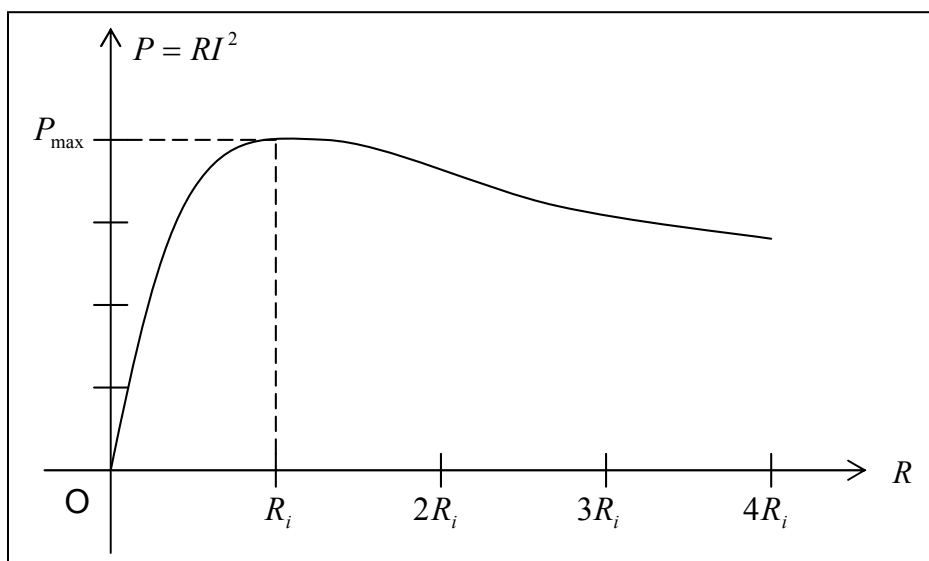


Fig. 19.3 Graficul puterii transferate de la generator la sarcină în funcție de rezistența sarcinii

Din graficul reprezentat în Fig. 19.3 se observă că puterea transferată sarcinii este maximă pentru $R = R_i$. Evident că dacă $R = 0$, puterea disipată pe rezistența de sarcină va fi zero. Dar care este puterea consumată pe rezistența internă în cazul $R = 0$? Pentru a afla rezultatul se utilizează relația (19.8):

$$P_i = \frac{U_e^2}{R_i + R} = \frac{U_e^2}{R_i + 0} = \frac{U_e^2}{R_i} \quad (19.12)$$

Se observă că în cazul în care $R = R_i$ puterea disipată pe rezistența internă a generatorului este de 4 ori mai mare decât puterea maximă transferată sarcinii la adaptare:

$$P_{i,R=0} = 4 \cdot P_{\max} = 4 \cdot \frac{U_e^2}{4R_i} = \frac{U_e^2}{R_i} \quad (19.13)$$

unde P_{\max} reprezintă puterea maximă transferată sarcinii la condițiile de adaptare.

Puterea disipată pe rezistența internă a generatorului este dată de relația:

$$P_g = R_i I^2 = R_i \cdot \frac{U_e^2}{(R_i + R)^2} \quad (19.14)$$

Randamentul transferului puterii active este definit ca raportul dintre puterea disipată pe rezistența de sarcină și puterea totală disipată în circuit:

$$\eta = \frac{P}{P_t} = \frac{\frac{RU_e^2}{(R_i + R)^2}}{\frac{U_e^2}{R_i + R}} = \frac{R}{R_i + R} \quad (19.15)$$

Este util să se facă un tabel cu puterile care sunt disipate în circuit.

Tabelul 19.1

Puterea maximă transferată sarcinii la adaptare ($X = -X_i$ și $R = R_i$)	Puterea disipată pe rezistența de sarcină, în funcție de rezistența R a sarcinii	Puterea disipată pe rezistența internă a generatorului în funcție de rezistența R a sarcinii	Puterea totală disipată în circuit, pe rezistența internă și pe cea de sarcină, în funcție de rezistența R a sarcinii
$P_{\max} = \frac{U_e^2}{4R_i}$	$P = R \frac{U_e^2}{(R_i + R)^2}$	$P_g = R_i \cdot \frac{U_e^2}{(R_i + R)^2}$	$P_t = \frac{U_e^2}{R_i + R}$

Se dorește să se traseze graficele puterilor P , P_g și P_t având ca variabilă rezistența R a sarcinii. Aceasta va fi exprimată nu în valori absolute, adică în ohm, ci în submultiplii și multiplii de R_i . Deasemenea, trebuie observat că în toate relațiile puterilor din circuit apare factorul U_e^2 . Pentru eliminarea acestui factor, puterile respective se vor reprezenta ca puteri raportate la puterea maximă, P_{\max} , disipată pe sarcină (cazul adaptării). Astfel rezultă tabelul 19.2.

Tabelul 19.2

R	$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4R_i R}{(R_i + R)^2}$	$\frac{P_g}{P_{\max}} = \frac{4R_i^2}{(R_i + R)^2}$	$\frac{P_t}{P_{\max}} = \frac{4R_i}{R_i + R}$	$\eta = \frac{R}{R_i + R}$
0	0	4	4	0
$\frac{R_i}{4}$	0.640	2.560	3.200	0.200
$\frac{2R_i}{4}$	0.888	1.777	2.666	0.333
$\frac{3R_i}{4}$	0.979	1.306	2.285	0.428
R_i	1	1	2	0.5

$2R_i$	0.888	0.444	1.333	0.666
$3R_i$	0.750	0.250	1	0.750
$4R_i$	0.640	0.16	0.800	0.800

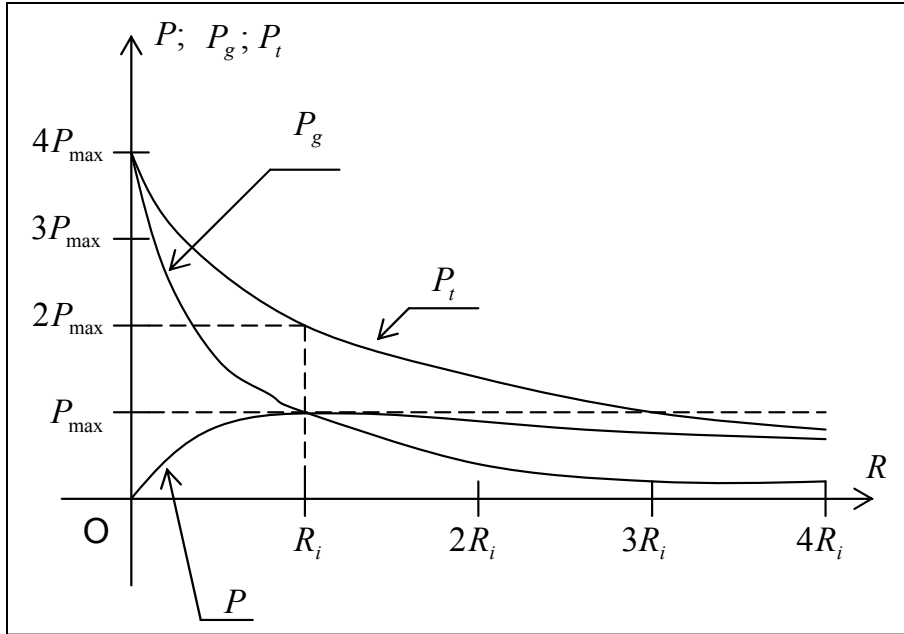


Fig. 19.4 Graficele puterilor disipate în circuit P , P_g , P_t în funcție de rezistența de sarcină R .

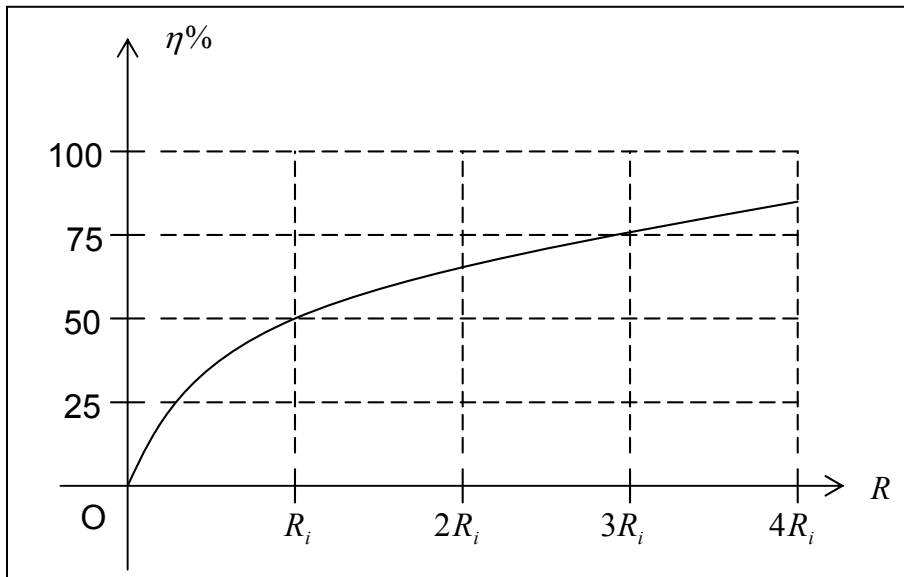


Fig. 19.5 Graficul randamentului transferului puterii active de la generator la sarcină, în funcție de rezistența de sarcină R .

Graficele din figurile 19.4 și 19.5 sunt aproximative. Valorile exacte pot fi găsite în tabelul 2.

Atât din grafice, cât și din tabel, se vede că la adaptare randamentul transferului este de numai 50%, adică jumătate din puterea generatorului este disipată pe rezistența internă. Pentru micșorarea pierderilor pe rezistența internă se poate crește valoarea rezistenței de sarcină la $2R_i$, valoare la care pierderile pe rezistența internă scad la mai mult de jumătate, în timp ce puterea transferată sarcinii scade numai la 88%.

Pentru adaptarea sarcinii la generator se folosesc transformatoare de adaptare.

Valerică COSTIN, YO7AYH

costin.valerica@rdslink.ro

costin.valerica@gmail.com